LÊ HẢI CHÂU
(Nhà giáo Nhân dân)

TÌM CHÌA KHOÁ VÀNG GIẢI BÀI TOÁN HAY 6-7

Dùng cho lớp 6-7



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LÊ HẢI CHÂU
Nhà giáo Nhân dân

TÌM CHÌA KHÓA VÀNG GIẢI BÀI TOÁN HAY

Dành cho các bạn có trình độ lớp 6 - lớp 7

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội

Điện thoại: Biên tập-Chế bản: (04) 39714896;

Hành chính: (04) 39714899; Tổng biên tập: (04) 39714897

Fax: (04) 39714899

Chịu trách nhiệm xuất bản

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO

Tổng biên tập: PHẠM THỊ TRÂM

Biên tập: BÍCH HẠNH

Đối tác liên kết xuất bản:

NHÀ SÁCH HỒNG ÂN

SÁCH LIÊN KẾT

TÌM CHÌA KHÓA VÀNG GIẢI BÀI TOÁN HAY – LỚP 6 – 7

Mã số: 1L – 338ĐH2009

In 1500 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Xí nghiệp in Đường sắt Sài Gòn.

Số xuất bản: 1123 – 2009/CXB/09 – 215/ĐHQGHN, ngày 9/12/2009.

Quyết định xuất bản số: 338LK-TN/XB.

In xong và nộp lưu chiểu quý I năm 2010.

Vài dòng mở đầu

Các bạn trẻ yêu toán thân mến.

Vườn hoa toán học rất đa dạng và phong phú, có nhiều bông hoa rực rỡ đầy hương sắc. Đó là những bài toán hay, đòi hỏi phát huy trí thông minh và óc sáng tạo khi giải.

Muốn giải một bài toán, sau khi đọc kĩ đề bài, điều đầu tiên quan trọng là cách suy nghĩ tìm ra đường lối giải, đó chính là :

"Tìm chìa khóa vàng giải bài toán hay"

Cuốn sách này gồm 2 tập :

- Tập 1 dành cho các bạn có trình độ lớp 6 và lớp 7.
- Tập 2 dành cho các bạn có trình độ lớp 8 và lớp 9.

Nội dung được trình bày theo từng xoắn (§). Ở mỗi xoắn đều gồm các mục :

A. Những kiến thức cần nắm vững.

B. Các bài toán điển hình.

C. Cách giải và lời bình.

Đặc biệt phần *lời bình* nhằm khai thác đề bài đã ra và được trình bày với những bài toán tương tự khó hơn, hoặc những bài toán mở rộng và những bài toán hay liên quan dưới dạng khác.

D. Đố bạn giải được, gồm những câu đố thông minh, sáng tạo, giúp các bạn yêu toán hào hứng thêm khi giải đáp.

Mong rằng cuốn sách này giúp các bạn trẻ yêu toán gặt hái được nhiều thành công trong việc học giỏi môn Toán, "môn thể dục của trí tuệ".

Hà Nội, mùa thu 2009

LÊ HẢI CHÂU

§1. THỬ TRÍ THÔNG MINH

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

Đây là những *câu hỏi, câu đố ngắn gọn, hấp dẫn và thông minh* đòi hỏi lập luận, phân tích có lý, hợp lôgic, vì nội dung tương đối thiết thực, phản ánh những sự kiện trong đời sống muôn màu muôn vẻ.

Để giải đáp cần đọc kĩ từng câu hỏi, câu đố, suy ngẫm xem nội dung cho cái gì, tìm cái gì và cách giải có khi độc đáo, thông minh. Hãy tìm ra chìa khóa vàng nhằm giúp cho việc giải toán được ngắn gọn, nhanh chóng.

B. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

1. Chuyện xưa kể rằng : "Một người cha bán rượu vang nhân ngày sinh nhật đã chia cho 3 con trai 21 thùng rượu trong đó có 7 thùng đầy rượu, 7 thùng chỉ đầy một nửa, 7 thùng không và nói rằng : Các con hãy chia thành 3 phần sao cho người nào cũng nhận được phần như nhau".

Các con đã chia như thế nào ?

2. a) Nếu 2 con mèo trong 2 giờ ăn hết 2 con chuột thì 4 con mèo trong 4 giờ ăn hết mấy con chuột ?

b) Nếu 1,5 con gà mái trong 1,5 ngày đẻ được 1,5 quả trứng thì 4 con gà mái trong 9 ngày đẻ được bao nhiêu quả trứng ?

3. a) Trước mặt bạn Nguyên là một lọ đựng 1100g đường và một cái cân bàn. Muốn có được 1kg đường thì bạn phải cân như thế nào nếu có thêm hai lọ không đựng 650g và 300g ?

b) Mẹ dặn bạn Khuê chia 8 lít sữa đựng trong một bình thành hai phần bằng nhau mà chỉ có hai bình không, chứa được 5 lít và 3 lít. Bạn Khuê phải làm như thế nào ?

4. Một bà mang 5 rổ cam gồm hai loại. Số lượng cam trong 5 rổ như sau : 20, 25, 30, 35 và 40 quả cam. Rổ cam nào cũng chỉ chứa toàn cam cùng một loại. Bà ta bán cam ở một rổ và thấy rằng số cam loại hai còn lại chỉ bằng một nửa số cam loại một. Hỏi còn lại bao nhiêu cam loại hai ?

5. Một bình đựng mật ong, một bình nữa đựng nước sôi để nguội, lượng mật ong bằng lượng nước. Từ bình thứ nhất lấy ra nửa lít mật ong rồi đổ sang bình thứ hai. Sau đó, nửa lít hỗn hợp này lại đổ sang bình thứ nhất. Hỏi nước trong bình thứ nhất có nhiều hơn mật ong trong bình thứ hai không ?

6. Một ông sắp xếp 32 chai rượu vang vào một hộp hình vuông có 9 ô nhưng ô chính giữa phải để trống. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp để ở bốn phía đều có 9 chai ?

7. Số nào gấp 7 lần chữ số hàng đơn vị của nó ?

8. Bốn số liên tiếp có tích bằng 1680. Đó là bốn số nào ?

9. Chia 7 chiếc bánh cho 12 người để người nào cũng có phần đúng như người khác (mà không chia nhỏ mỗi bánh thành 12 phần bằng nhau).

10. Trong một phép chia nếu cộng số bị chia với 65 và cộng số chia với 5 thì thương và số dư không thay đổi. Thương bằng bao nhiêu ?

11. Viết tất cả số tự nhiên từ 1 đến 99 999 trên một băng giấy :

12345...12131415...999979999899999.

Hãy tìm tổng các chữ số của số khổng lồ đó.

12.

Vừa gà vừa thỏ
Có bảy trăm con
Bó lại cho tròn
Một nghìn chân chẵn.

Hỏi có bao nhiêu gà, bao nhiêu thỏ ?

13. Cho dãy số : 150*149*148*147*...*51*50

Giải thích tại sao nếu điền vào dấu sao (*) các dấu + hoặc − thì kết quả không thể bằng 2011.

14. Viết liên tiếp các số tự nhiên từ 1 đến 1999 thành số có nhiều chữ số 12345...199719981999. Hỏi chữ số 9 cuối cùng ở vị trí thứ bao nhiêu ?

15. Tính tổng của tám số hạng mà năm số hạng đầu là 1, 2, 6, 24, 120. Từ đó suy ra quy luật tính với n số hạng.

16. Cho $A = \underbrace{11...11}_{198 \text{ chữ số}}$ và $B = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7 + 3^8$. Chứng minh rằng nếu A chia cho 3 và B chia cho 4 thì hai số dư giống nhau.

17. Nếu viết một chữ số 0 vào giữa số có hai chữ số $\overline{xy}$ thì số mới $\overline{x0y}$ lớn hơn số cũ bao nhiêu đơn vị ? Hiệu này có phụ thuộc vào chữ số hàng đơn vị y không ?

18. Tìm tất cả số chẵn có ba chữ số sao cho khi chia mỗi số đó cho 9 thì được thương cũng là số có ba chữ số.

19. Thay dấu * bằng những chữ số thích hợp trong bốn phép tính sau :

a)
```
   **1*4
+  *9*4*
  ------
   34110
```

b)
```
   *5*2
-  5*6*
  -----
   3181
```

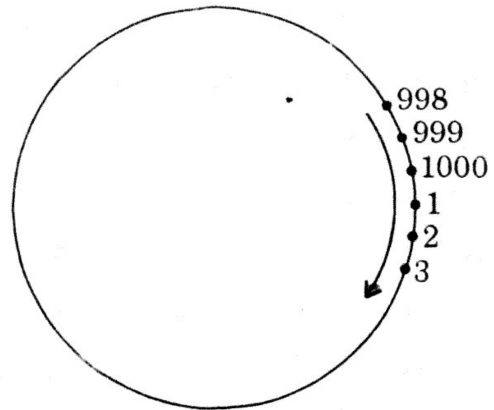
c)
```
    587
x    **
  -----
    ***
   ***
  -----
   ****
```

d)
```
  10** | *
-  **  |-----
  ---  | 2*7
    **
-   **
   ---
     0
```

20. Bác Khoa hỏi ba cháu đi câu cá về xem mỗi cháu câu được mấy con cá. Cháu thứ nhất trả lời : Thưa bác, sáu mất đầu. Cháu thứ hai : Thưa bác, một nửa của tám. Cháu thứ ba : Thưa bác, chín mất đuôi.

Hỏi mỗi cháu câu được mấy con cá ?

21. Viết các số từ 1 đến 1000 theo thứ tự đó trên một vòng tròn (hình vẽ bên). Bắt đầu xóa số 1 rồi cứ 15 số tiếp theo lại xóa một số (tức là xóa các số 1; 16; 31;...) và cứ thế tiếp tục mãi, với chú ý rằng khi trở lại vòng hai, vòng ba,... thì những số đã bị xóa vẫn được tính.



Hỏi còn lại bao nhiêu số không bị xóa ?

C. CÁCH GIẢI VÀ LỜI BÌNH

1. Theo đề bài ta phải chia số thùng đầy rượu, đầy một nửa và thùng không thành 3 phần bằng nhau. Có 3 cách chia như sau :

– *CÁCH 1.* Từ 4 thùng đầy một nửa có thể chia thành 2 thùng đầy và 2 thùng không. Như thế ta có 9 thùng đầy, 3 thùng đầy một nửa và 9 thùng không.

Đến đây thì rõ ràng mỗi người con được : 3 thùng đầy, 1 thùng đầy một nửa, 3 thùng không.

– *CÁCH 2.* Từ 1 thùng đầy và 1 thùng không ta có 2 thùng đầy một nửa. Như thế ta có 6 thùng đầy, 9 thùng đầy một nửa và 6 thùng không.

Rõ ràng mỗi người con được : 2 thùng đầy, 3 thùng đầy một nửa, 2 thùng không.

– *CÁCH 3.* Mỗi người con có thể được : 1 thùng đầy, 5 thùng đầy một nửa và 1 thùng không.

• ***Lời bình :*** *Nếu người cha chia 24 thùng rượu trong đó có 8 thùng đầy rượu, 8 thùng đầy một nửa và 8 thùng không thì liệu có chia đều cho ba con được không ?*

Được ! Chẳng hạn mỗi người con được : 2 thùng đầy, 4 thùng đầy một nửa và 2 thùng không.

Ta hãy giải bài toán tổng quát : "Người cha chia cho ba con cả thảy n thùng : đầy rượu, đầy một nửa và thùng không. Thế thì cách chia như thế nào ?"

Nếu n chia hết cho 3 thì mỗi người con được $\frac{n}{3}$ thùng đầy, đầy một nửa và thùng không.

b) Nếu $n = 3p + 1$ thì từ 1 thùng đầy và 1 thùng không, ta được 2 thùng đầy một nửa. Điều đó có nghĩa là : người cha có $(n - 1)$ thùng đầy, $(n + 2)$ thùng đầy một nửa và $(n - 1)$ thùng không. Nhưng $n - 1 = 3p$, $n + 2 = 3(p + 1)$.

Vậy mỗi người con được : p thùng đầy, $(p + 1)$ thùng đầy một nửa và p thùng không.

c) Cuối cùng nếu $n = 3p + 2$ thì từ 2 thùng đầy và 2 thùng không ta được 4 thùng đầy một nửa. Như thế người cha có $(n - 2)$ thùng đầy, $(n + 4)$ thùng đầy một nửa và $(n - 2)$ thùng không. Rõ ràng $n - 2 = 3p$, $n + 4 = 3(p + 2)$.

Vậy mỗi người con được : p thùng đầy, $(p + 2)$ thùng đầy một nửa và p thùng không.

2. a) Cách lập luận như sau :

2 mèo trong 2 giờ ăn hết 2 chuột.

2 mèo trong 4 giờ ăn hết 4 chuột.

Vậy : 4 mèo trong 4 giờ ăn hết 8 chuột.

b) Một gà mái trong 1,5 ngày đẻ được 1 quả trứng. Thế thì trong 9 ngày gà đẻ được 6 quả trứng, vậy trong số ngày đó (9 ngày) 4 gà mái đẻ được 24 quả trứng.

• ***Lời bình :*** Nếu đề bài là : *"3 con mèo ăn hết 3 con chuột trong 1,5 giờ thì 10 con mèo ăn hết 20 con chuột trong bao lâu ?".*

Cách giải sẽ như sau :

3 con mèo trong 1,5 giờ ăn hết 3 chuột.

1 mèo trong 1,5 giờ ăn hết 1 chuột.

1 mèo trong 3 giờ ăn hết 2 chuột.

10 mèo trong 3 giờ ăn hết 20 chuột.

Vậy đáp số là : 3 giờ.

Xét bài toán tổng quát : "Nếu n con mèo trong n giờ ăn hết n con chuột thì t con mèo trong t giờ ăn hết bao nhiêu con chuột ?"

Ta sẽ thấy rằng số chuột mà mèo ăn hết là $\frac{t^2}{n}$. Như thế với $n = 2$ và $t = 4$ như câu a thì 2 con mèo trong 4 giờ sẽ ăn hết $16 : 2 = 8$ (con chuột).

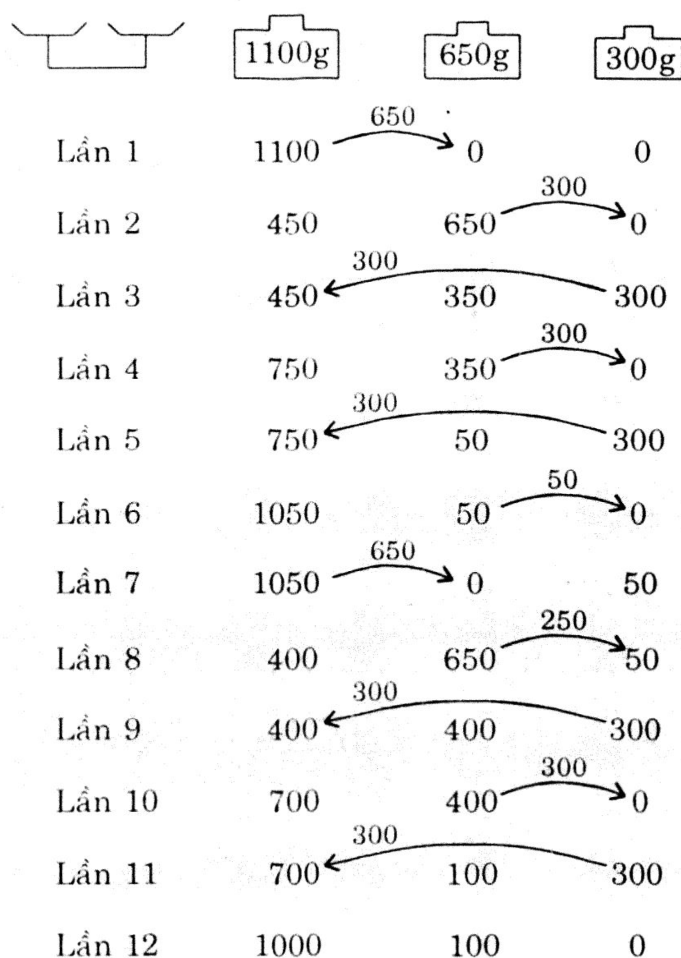
3. a) Gọi A là lọ đựng được 1100g, B và C là các lọ đựng được 650g và 300g. Quá trình cân diễn ra theo bảng sau :

A	1100	450	450	750	750	1050	400	400	700	700	1000
B	0	650	350	350	50	0	650	400	400	100	100
C	0	0	300	0	300	50	50	300	0	300	0

Sau 12 lần sẽ có được 1000g đường trong lọ A.

Có thể lập luận như sau : Đổ đường từ lọ A sang lọ B và từ lọ B sang lọ C. Khi đó trong lọ B còn 350g đường ta để riêng. Đường còn lại đổ vào lọ A và C, đổ đầy lọ B, tức là được 650g, như vậy cùng với 350g đường để riêng ở lọ B bây giờ sẽ có cả thảy 650 + 350 = 1000g, tức là 1kg đường.

Có thể minh họa bằng sơ đồ sau :

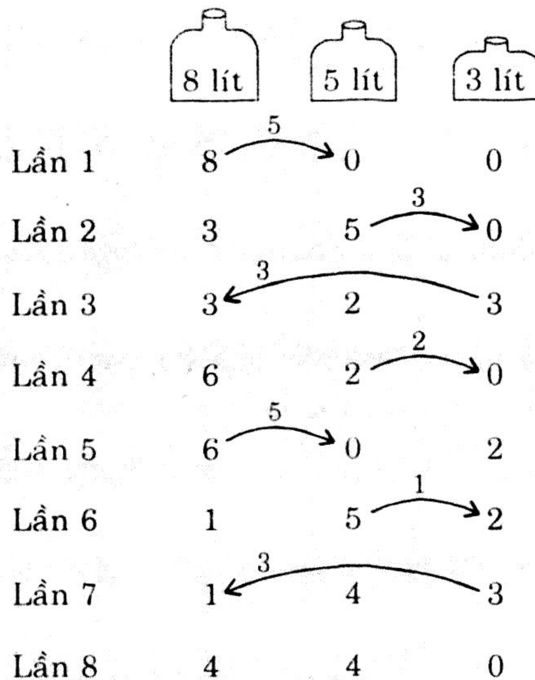


b) Quá trình bạn Khuê phải chia sữa như sau :

Gọi C, D, E là ba bình sữa đựng được theo thứ tự 8 lít, 5 lít và 3 lít.

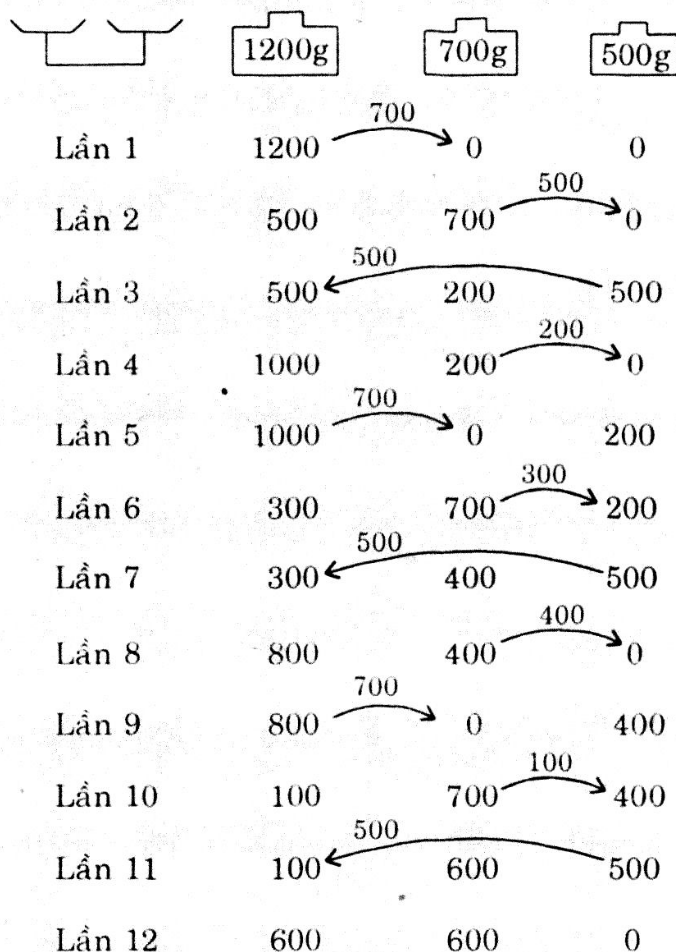
Đổ 8 lít sữa ở bình C cho đầy bình D (5 lít) rồi từ bình D đổ đầy bình E (3 lít). Đổ lại 3 lít đó từ bình E vào bình C. Còn lại 2 lít từ bình D đổ vào bình E. Lại tiếp tục đổ đầy bình D (5 lít) còn 1 lít đổ vào bình E. Cuối cùng từ 3 lít ở bình E đổ vào bình C được 4 lít.

Có thể minh họa bằng sơ đồ sau :



• ***Lời bình :*** *a) Nếu có 1200g đường đựng trong một lọ lớn và hai lọ không, đựng được 700g và 500g thì bạn Nguyên làm thế nào để chia được số đường 1200g thành hai phần bằng nhau ?*

Lần này bạn Nguyên phải chia theo sơ đồ sau :



4. Số cam gồm hai loại còn lại phải chia hết cho 3. Lúc đầu số cam là 150 quả (vì 20 + 25 + 30 + 35 + 40 = 150).

Nếu giả sử bà ta bán cam của rổ thứ nhất thì số cam còn lại là 150 – 20 = 130 (quả). Nhưng điều này không thể xảy ra vì 130 không chia hết cho 3.

Cũng như thế, bà ta không thể bắt đầu bán cam của rổ thứ hai, rổ thứ tư và rổ thứ năm. Do đó bà chỉ có thể bán cam ở rổ thứ ba (tức rổ có 30 quả), vì sau khi bán sẽ còn lại 150 – 30 = 120 (quả). Số này chia hết cho 3.

Từ đó, suy ra số cam loại hai còn lại là 40 quả.

- **Lời bình :** Bây giờ : *"Nếu có một cửa hàng bán trứng đựng trong 6 rổ, rổ A đựng 310 quả, rổ B đựng 200 quả, rổ C đựng 190 quả, rổ D đựng 180 quả, rổ E đựng 160 quả và rổ G đựng 150 quả. Trong ngày đầu có hai người I và II đến mua : người thứ I mua 2 rổ, người thứ II mua 3 rổ và như vậy mua gấp đôi số trứng mà người thứ I mua. Hỏi còn lại rổ nguyên nào chưa bán ?"*

Ở đây phải đọc kĩ đề bài để thấy rằng : người thứ II mua nhiều gấp đôi người thứ I nên số trứng mà cả hai người mua phải chia hết cho 3, đó là chìa khóa vàng để giải bài toán.

Số trứng mà cửa hàng có cả thảy là :

310 + 200 + 190 + 180 + 160 + 150 = 1190 (quả trứng)

Ta lập luận như sau :

- Nếu còn lại rổ A nguyên thì phải bán 1190 – 310 = 880 (quả) nhưng số 880 không chia hết cho 3.
- Nếu còn lại rổ C thì phải bán 1190 – 190 = 1000 (quả). Số 1000 cũng không chia hết cho 3.
- Nếu còn lại rổ D thì phải bán 1190 – 180 = 1010 (quả). Số 1010 này cũng không chia hết cho 3.

Tương tự, nếu còn lại rổ E thì phải bán 1190 – 160 = 1030 (quả) hoặc rổ G thì phải bán 1190 – 150 = 1040 (quả). Cả hai số 1030 và 1040 đều không chia hết cho 3.

Cuối cùng chỉ còn lại trường hợp rổ B và như thế cửa hàng đã bán 1190 – 200 = 990 (quả). Số 990 chia hết cho 3.

Vậy cửa hàng đã bán cho hai người I và II 5 rổ A, C, D, E, G và còn lại rổ B chưa bán.

5. Trước hết cần thấy rằng sau 2 lần thì lượng chất lỏng trong hai bình bằng nhau. Như thế sau khi trộn thì hỗn hợp mật ong ở bình thứ hai cũng bằng số lượng nước ở bình thứ nhất. Do đó lượng mật ong ở bình thứ hai bằng lượng nước ở bình thứ nhất (không bên nào nhiều hơn bên nào).

• ***Lời bình :*** Ta khai thác thêm bài toán trên như sau :

"Từ một bình chứa đầy 5 lít nước, ta lấy ra 1 lít rồi đổ vào 1 lít mật ong. Trộn lẫn nước và mật ong rồi lấy ra 1 lít hỗn hợp và lại đổ thêm vào 1 lít mật ong. Lại trộn lẫn nước và mật ong rồi lấy ra 1 lít hỗn hợp và đổ thêm vào 1 lít mật ong. Hỏi trong bình còn lại bao nhiêu nước ?"

Ta thấy ngay rằng : sau lần thứ nhất trong bình còn lại 4 lít nước. Lấy ra 1 lít hỗn hợp tức là mỗi lần lấy ra $\frac{1}{5}$ hỗn hợp. Do đó sau lần thứ hai trong bình còn $4 - \frac{1}{5} \times 4 = \frac{16}{5}$ (lít nước). Sau đó lần thứ ba trong bình còn lại : $\frac{16}{5} - \frac{1}{5} \times \frac{16}{5} = \frac{64}{25}$ (lít nước).

6. Có thể có 6 cách sắp xếp như ở các hình ở dưới đây :

2	5	2
5		5
2	5	2

3	3	3
3		3
3	3	3

4	1	4
1		1
4	1	4

3	5	1
5		5
1	5	3

5	3	1
3		3
1	3	5

7	1	1
1		1
1	1	7

• ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán tương tự sau(*) :

"Để trọ học 20 cô gái được sắp xếp vào 8 phòng nhỏ như ở hình bên. Mỗi tối chủ nhà sang kiểm tra bốn phía thấy phía nào cũng đủ 7 cô gái. Một hôm có 4 cô bạn đến chơi và được bố trí ở lại trong các phòng (tức có 24 cô). Chủ nhà đến kiểm tra thấy mỗi phía đều có đủ 7 cô.

2	3	2
3		3
2	3	2

Một hôm khác có 4 cô đi chơi, chủ nhà lại đến kiểm tra và vẫn thấy mỗi phía đều đủ 7 cô (tuy lần này chỉ còn lại 16 cô ở nhà). Họ đã bố trí thông minh như thế nào mà chủ nhà vẫn yên chí là cả 20 cô đều có mặt trong hai lần kiểm tra ?"

Đúng là các cô đã bố trí thông minh trong hai lần như sau : Cách bố trí 24 cô gái như ở hình 1a, cách bố trí 16 cô gái như ở hình 1b.

(*) Xem : *"Toán học cười, vui, hấp dẫn"* của Lê Hải Châu, tập 2, NXB Trẻ.

1	5	1
5		5
1	5	1

(a)

3	1	3
1		1
3	1	3

(b)

H.1

7. Nếu lấy số phải tìm trừ đi chữ số hàng đơn vị là sẽ được một số tận cùng bằng 0 và số này phải chia hết cho 6. Thế thì số nào tận cùng bằng 0 và chia hết cho 6 lại cho thương là số có một chữ số ?

Rõ ràng chỉ có số 30, do đó số phải tìm là 35 (ta có $35 = 7 \times 5$).

• ***Lời bình :*** Từ bài toán này ta khai thác thêm :

"Số nào khi xóa chữ số cuối cùng của nó sẽ giảm đi một số nguyên lần ?"

Rõ ràng nếu xóa chữ số cuối cùng thì số phải giảm đi ít hơn 10 lần. Nếu giảm đúng 10 lần thì số đó phải tận cùng bằng 0, do đó tất cả những số như vậy đều thỏa mãn.

8. Trước hết ta thấy rằng : $1680 = 2.2.2.2.3.5.7$.

Trong các thừa số trên ta hãy tìm xem lấy những thừa số nào thì sẽ được 4 số liên tiếp thỏa mãn bài ra. Đó là các thừa số : 5; $2.3 = 6$; 7 và $2.2.2 = 8$.

Vậy tích của bốn số liên tiếp : 5, 6, 7, 8 bằng $5.6.7.8 = 1680$.

• ***Lời bình :*** *"Nếu tích của bốn số bằng 3024, thì đó là bốn số nào ?"*

Trước hết ta thấy rằng số 3024 không tận cùng bằng 5 hoặc bằng 0 nên một trong bốn số đó không chia hết cho 5 và 10. Nhưng nếu cả bốn số lại lớn hơn 10 thì tích của chúng phải lớn hơn 10000. Vì thế bốn số phải tìm hoặc là 1, 2, 3, 4 hoặc là 6, 7, 8, 9.

Nhưng tích của bốn số 1, 2, 3, 4 bằng 24, do đó chỉ có thể bốn số phải tìm là 6, 7, 8, 9. Thật vậy, thử lại thấy ngay rằng tích $6.7.8.9 = 3024$.

9. Cần suy nghĩ xem đầu tiên lấy bao nhiêu chiếc bánh để chia. Nếu lấy 3 chiếc bánh và chia mỗi bánh thành 4 phần bằng nhau sẽ được 12 phần. Mỗi người sẽ nhận được $\frac{1}{4}$ chiếc bánh.

Còn lại 4 bánh thì chia mỗi bánh thành 3 phần bằng nhau sẽ được 12 phần. Mỗi người sẽ nhận thêm được $\frac{1}{3}$ chiếc bánh.

Vậy cả hai lần mỗi người đã nhận được : $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$ (bánh).

• ***Lời bình :*** *Nếu số người là 6 và chỉ có 5 chiếc bánh thì chia như thế nào (để không chia nhỏ bất cứ bánh nào ra 6 phần bằng nhau) ?*

Tương tự như trên, lấy 3 bánh và chia đôi mỗi bánh được 6 phần bằng

nhau. Mỗi người được 1 phần. Còn lại 2 bánh, chia mỗi bánh thành 3 phần bằng nhau, được 6 phần bằng nhau nữa. Mỗi người lại được thêm 1 phần.

Rõ ràng : $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$ (bánh).

10. Gọi số bị chia là SBC, số chia là SC, q là thương và r là số dư. Theo bài ra ta có thể viết hai đẳng thức sau :

$$SBC = q.SC + r \quad \text{và} \quad SBC + 65 = q(SC + 5) + r$$

Lấy đẳng thức thứ hai trừ đi đẳng thức thứ nhất từng vế ta có ngay đẳng thức : $65 = 5.q$.

Từ đó thương $q = 13$.

• ***Lời bình :*** Nếu bài ra là : *"Chứng minh rằng khi chia số A và số B cho hiệu của chúng thì được số dư bằng nhau và thương khác nhau 1 đơn vị"* thì cách giải như thế nào ?

Ta có thể viết : $A - B = d$, hay $A = B + d$ (1)

Khi chia A cho d được : $A = k.d + r$ (2)

Thay vào (1) ta có : $kd + r = B + d$, hay $B = (k - 1)d + r$ (3)

So sánh (2) và (3) ta thấy ngay là hai số dư r bằng nhau, còn hai thương k và k – 1 khác nhau 1 đơn vị.

Ví dụ : Với hai số 53 và 41 thì hiệu của chúng là 53 – 41 = 12. Chia 53 cho 12 được thương là 4 và dư 5; chia 41 cho 12 được thương là 3 và dư 5. Ta được hai số dư đều là 5 còn thương khác nhau 1 đơn vị.

11. Tất cả các số từ 1 đến 99 998 (trừ số cuối 99 999) có thể chia thành cặp : 1 và 99 998; 2 và 99 997; 3 và 99 996; v.v...

Tổng các chữ số của hai số trong mỗi cặp đều bằng 9.5 = 45 (vì 1 + 99 998 = 2 + 99 997 = 3 + 99 996 = ... = 49 999 + 50 000 = 99 999) mà có cả thảy 49 999 cặp như thế và nếu thêm số 99 999 không có cặp với số nào thì ta có : 50 000 × 45 = 2 250 000.

Đó là tổng các chữ số của số khổng lồ này.

•• ***Lời bình :*** Xét bài toán sau :

"Viết liên tiếp các số tự nhiên từ 1 đến 100 thành một số có nhiều chữ số : 123456...9899100. Hãy xóa đi 100 chữ số để còn lại số lớn nhất."

Trước hết ta phải tính xem số 123456...9899100 có bao nhiêu chữ số để khi xóa đi 100 chữ số thì còn lại bao nhiêu chữ số.

Số này có 9 + 180 + 3 = 192 (chữ số). Nếu xóa đi 100 chữ số thì còn lại 92 chữ số. Từ đó thấy rằng muốn số gồm 92 chữ số còn lại này là lớn nhất thì phải xóa đi những số nào ?

Rõ ràng trước hết phải xóa đi 8 chữ số đầu tiên và giữ lại chữ số 9. Chữ số thứ hai phải giữ lại là 9 (do đó phải xóa thêm (19 – 9).2 – 1 = 19 chữ số nữa)... Năm chữ số đầu tiên giữ lại phải là 9, tức là các số 9, 19, 29, 39, 49. Do đó cho tới số 49 đã phải xóa đi 8 + 4.19 = 84 chữ số.

Như thế chỉ còn được xóa 100 – 84 = 16 chữ số nữa trong số :

5051525354555657 5859

Để xóa đi 16 chữ số sao cho chữ số đầu tiên là lớn nhất. Nó không thể là 9 hoặc 8 (vì nếu xóa 9 hoặc 8 thì phải xóa đi một số chữ số lớn hơn 16, tức là 17 hoặc 19 chữ số !). Do đó phải để lại 7, tức là phải xóa đi 15 chữ số để còn lại số 75859.

Cuối cùng chỉ cần xóa thêm 1 chữ số nữa trong số 75859 này, đó là chữ số 5 để chỉ còn lại số 7859.

Những số tiếp theo là từ 60 đến 100. Vậy số lớn nhất còn lại gồm 92 chữ số là số : 9999978596061...100.

12. Giả sử 700 con đều là gà thì số chân sẽ là 700 × 2 = 1400 (chân). Còn dư 1800 – 1400 = 400 (chân) là do có thêm thỏ 4 chân. Từ đó thay một gà bằng một thỏ thì phải thêm 2 chân. Vậy :

Số thỏ là : 400 : 2 = 200 (thỏ)

Số gà là : 700 – 200 = 500 (gà).

- ***Lời bình :***

Có thể giải cách khác bằng cách giả sử 700 con đều là thỏ thì số chân sẽ là 700 × 4 = 2800 (chân). Như thế sẽ thừa ra 2800 – 1800 = 1000 (chân) do còn có gà 2 chân. Từ đó thay một thỏ bằng một gà thì bớt đi 2 chân. Vậy số gà là : 1000 : 2 = 500 (gà) và số thỏ là 200 con.

Ngoài ra có thể giải bài toán tương tự về bắn súng : *"Trong cuộc thi bắn súng, mỗi đội được bắn 20 phát. Mỗi phát trúng đích được 10 điểm, mỗi phát không trúng đích bị trừ 15 điểm. Đội A được cả thảy 150 điểm, hỏi đội đã bắn bao nhiêu phát trúng đích ?"*.

Ta giả sử cả 20 phát đều trúng đích thì tổng số điểm đạt được sẽ là : 10 × 20 = 200 (điểm). Như thế, thiếu mất 250 – 200 = 50 (điểm) là do còn một số phát không trúng đích.

Giữa một phát trúng đích và một phát không trúng đích có sự chênh lệch điểm là 10 + 15 = 25 (điểm). Suy ra số phát không trúng đích là 50 : 25 = 2 (phát).

Vậy số phát bắn trúng đích là 20 – 2 = 18 (phát).

Thử lại : Có 18 phát trúng đích được 18 × 10 = 180 (điểm), nhưng có 2 phát không trúng đích bị trừ đi 2 × 15 = 30 (điểm). Vậy đội A chỉ còn được 180 – 30 = 150 (điểm), đúng với bài ra.

13. Trước hết hãy quan sát dãy số đã cho để thấy rằng : mỗi cặp số liên tiếp đều có tổng hoặc hiệu là một số lẻ, chẳng hạn :

$$150 + 149 = 299, \text{ hoặc } 150 - 149 = 1.$$

Từ 50 đến 150 có cả thảy 50 cặp số lẻ, mà tổng hoặc hiệu của 50 số lẻ phải là một số chẵn, vì vậy không thể là số lẻ 2011.

- ***Lời bình :*** *Nếu điền vào dấu sao (*) thứ nhất (từ trái sang phải) dấu +, rồi điền vào hai dấu sao thứ hai và thứ ba hai dấu –, điền vào dấu sao thứ tư và thứ năm hai dấu +, v.v... thì kết quả sẽ là số nào ?*

Ta hãy tính kết quả của dãy số sau :

$$150 + 149 - 148 - 147 + 146 + 145 - \ldots,$$

hay $50 + (51 - 52 - 53 + 54) + (55 - 56 - 57 + 58) + \ldots +$

$$+ (146 - 147 - 148 + 149) + 150.$$

Mỗi biểu thức trong dấu ( ) đều bằng 0, do đó kết quả sẽ là : $150 + 50 = 200$.

14. Từ số 1 đến số 1999 có cả thảy 9 số có một chữ số, 90 số có hai chữ số, 900 số có ba chữ số và $1999 - 1000 + 1 = 1000$ số có bốn chữ số.

Do đó số chữ số phải dùng để viết các số từ 1 đến 1999 là :

$$9 + 90.2 + 900.3 + 1000.4 = 6889 \text{ (chữ số)}$$

Vậy chữ số 9 cuối cùng ở vị trí thứ 6889 trong số có nhiều chữ số 12345...199719981999.

- ***Lời bình :*** Nếu bây giờ đổi bài toán thành :

"Viết liên tiếp các số tự nhiên chẵn từ 2 đến 1000 thì số chữ số phải dùng là bao nhiêu ? Chữ số ở vị trí thứ 1500 là chữ số gì ?".

Cách giải sẽ như sau :

Từ số 2 đến số 1000 (không kể số 1000) có : 4 số chẵn có một chữ số (2; 4; 6; 8), 45 số chẵn có hai chữ số (10; 12; 14; ...; 96; 98) và 450 số chẵn có ba chữ số (100; 102; ...; 998).

Vậy số chữ số phải dùng để viết các số chẵn từ 2 đến 1000 (không kể 1000) là : $4 + 2.45 + 3.450 = 1444$ (chữ số).

Do $1444 < 1500$ nên chữ số thứ 1500 thuộc một số chẵn có bốn chữ số. Ta có số chữ số còn lại để viết các số chẵn có bốn chữ số là :

$$1500 - 1444 = 56 \text{ (chữ số)}.$$

Với 56 chữ số này ta có thể viết được $56 : 4 = 14$ (số chẵn có bốn chữ số) bắt đầu từ số 1000. Suy ra số chẵn thứ 14 có bốn chữ số là :

$$1000 + 14.2 - 2 = 1026$$

(hoặc tính như sau : 1000; 1002; 1004; 1006; 1008; 1010; 1012; 1014; 1016; 1018; 1020; 1022; 1024; 1026).

Vậy chữ số thứ 1500 là chữ số 6 của số 1026.

15. Ta phải tìm ba số hạng cuối. Ta nhận thấy rằng :

Số hạng thứ hai 2 = 1.2, số hạng thứ ba 6 = 2.3, số hạng thứ tư 24 = 6.4, số hạng thứ năm 120 = 24.5. Từ đó suy ra ngay : số hạng thứ sáu là 120.6 = 720, số hạng thứ bảy là 720.7 = 5040 và số hạng thứ tám là 5040.8 = 40320.

Vậy tổng phải tìm là :

$$1 + 2 + 6 + 24 + 120 + 720 + 5040 + 40320 = 46\,233.$$

Suy ra quy luật tính là :

Số hạng thứ tám bằng số hạng thứ bảy nhân với 8. Một cách tổng quát số hạng thứ n bằng số hạng thứ n – 1 nhân với n.

- ***Lời bình :*** *"Hãy tính tổng các số lẻ từ 1 đến 199 999 và tổng các số chẵn từ 2 đến 200 000."*

Với tổng các số lẻ từ 1 đến 199 999 ta nhận thấy rằng :

$$1 + 199\,999 = 3 + 199\,997 = 5 + 199\,995 = ... = 200\,000$$

Từ 1 đến 199 999 có 100 000 số lẻ nên tổng phải tìm là :

200 000.100 000 = 20 000 000 000 (hai mươi tỉ)

Với tổng các số chẵn từ 2 đến 200 000 ta có thể viết :

$$(2 + 200\,000) + (4 + 199\,998) + (6 + 199\,996) + ... = 200\,002$$

Từ 2 đến 200 000 có 100 000 số chẵn nên tổng phải tìm là :

200 002.100 000 = 20 000 200 000 (hai mươi tỉ hai trăm nghìn).

16. Tổng các chữ số của A bằng : $\underbrace{1 + 1 + ... + 1 + 1}_{198 \text{ số hạng}} = 198$

mà 198 chia cho 3 được số dư bằng 0.

Tổng B có thể viết :

$$3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^8 = 3(3 + 4) + 3^3(3 + 1) + 3^5(3 + 1) + 3^7(3 + 1)$$
$$= 3.4 + 3^3.4 + 3^5.4 + 3^7.4$$

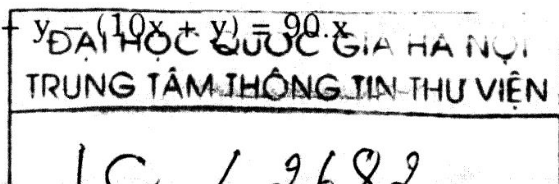
Chia cho 4 được số dư cũng bằng 0.

- ***Lời bình :*** *Chứng tỏ rằng các hiệu 111 – 11; 222 – 22; 333 – 33; ...; 999 – 99; và $\overline{aaa} - \overline{aa}$ theo thứ tự chia cho 1, 2, 3, ..., 9 và a đều cho số dư là 0.*

Rõ ràng 111 – 11 = 100 chia cho 1 dư 0; 222 – 22 = 200 chia cho 2 dư 0; 333 – 33 = 300 chia cho 3 dư 0, ..., thương đều bằng 100.

Tương tự $\left(\overline{aaa} - \overline{aa}\right)$: a được thương là 100 và dư 0.

17. Số $\overline{xy}$ có thể viết (10x + y), số $\overline{x0y}$ có thể viết (100x + y). Do đó số nói đã tăng thêm : 100x + y – (10x + y) = 90.x



tức là tăng thêm 90 lần chữ số hàng chục. Hiệu này không phụ thuộc vào chữ số hàng đơn vị y.

Ví dụ : Số 57 và số 507 thì hiệu 507 – 57 = 450, tức tăng thêm 90.5, không phụ thuộc vào chữ số hàng đơn vị là 7.

• ***Lời bình :*** *Hãy xét trường hợp giữa x và y của số* $\overline{xy}$ *ta viết xen vào hai, ba, bốn, ..., n chữ số 0 thì sao ?*

Nếu viết xen vào giữa x và y hai chữ số 0 được số mới là $\overline{x00y}$ = 1000x + y – (10x + y) = 990.x, tức là số mới đã tăng lên 990 lần chữ số hàng chục.

Ví dụ : Với các số 35 và 3005 ta có hiệu 3005 – 35 = 2970, tức là hiệu này đã tăng thêm 990.3.

Như vậy ta thấy rằng : nếu xen giữa số $\overline{xy}$ một, hai, ba, ..., n chữ số 0 thì số mới theo thứ tự tăng lên :

90x;	990x;	9990x;	99...9x
(1 c/s 9)	(2 c/s 9)	(3 c/s 9)	(n c/s 9)

18. Một số chẵn khi chia cho 9 phải cho thương là một số chẵn. Mặt khác thương lớn nhất có ba chữ số là 111 (do 999 : 9 = 111). Vì vậy thương chỉ có thể là các số chẵn nhỏ hơn 111, đó là : 100, 102, 104, 106, 108 và 110.

Nhân mỗi số này với 9 ta sẽ được các số phải tìm là :

900, 918, 936, 954, 972 và 990.

• ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau :

"Tìm số có hai chữ số biết rằng nếu số đó cộng với hai lần tổng các chữ số của nó được 87."

Gọi số đó là $\overline{ab}$, ta có : $\overline{ab}$ + 2(a + b) = 87

hay 10a + b + 2a + 2b = 87,

tức là 12a + 3b = 87 hay 4a + b = 29 (*)

Từ (*) ta thấy rằng : một mặt b < 10 nên 4a phải lớn hơn 29 – 10 = 19, do đó a > 4; mặt khác 4a < 29, do đó a < 8.

Suy ra a = 5, 6 hoặc 7.

Nếu a = 5 thì b = 29 – 5.4 = 9, ta được số 59.

Nếu a = 6 thì b = 29 – 6.4 = 5, ta được số 65.

Nếu a = 7 thì b = 29 – 7.4 = 1, ta được số 71.

Vậy số phải tìm là 59, 65, 71.

19. a) Kể từ phải sang trái, ở cột thứ nhất 4 + * = 0 thì dấu * phải là chữ số 6, ở cột thứ hai * + 4 = 1 thì dấu * phải là chữ số 6 (vì có nhớ 1 do ở cột thứ nhất 4 + 6 = 10).

Ở cột thứ ba 1 + * = 1 thì dấu * phải là chữ số 9 (vì có nhớ 1 do ở cột thứ hai 6 + 4 + 1 = 11). Ở cột thứ tư * + 9 = 4 thì dấu * phải là chữ số 4 (vì có nhớ 1 do ở cột thứ ba 1 + 9 + 1 = 11). Cuối cùng ở cột thứ năm * + * = 3 thì cả hai dấu * phải là hai chữ số 1 (vì có nhớ 1 do ở cột thứ tư 4 + 9 + 1 = 14).

Vậy phép cộng như sau :

$$\begin{array}{r} 14164 \\ +\ 19946 \\ \hline 34110 \end{array}$$

b) Ở cột thứ nhất (từ phải sang trái) 2 – * = 1 thì dấu * phải là chữ số 1. Ở cột thứ hai * – 6 = 8 thì dấu * phải là chữ số 4 (vì 14 – 6 = 8). Ở cột thứ ba 5 – * = 1 thì dấu * phải là chữ số 3 (vì có nhớ 1 ở cột thứ hai). Ở cột thứ tư * – 5 = 3 thì dấu * phải là chữ số 8.

Vậy phép trừ như sau :

$$\begin{array}{r} 8542 \\ -\ 5361 \\ \hline 3181 \end{array}$$

c) Số nhân có hai chữ số, chữ số hàng đơn vị của nó phải là 1 vì khi nhân với 587 (số bị nhân) thì cho tích riêng có ba chữ số (nếu là 2 thì khi nhân với 587 phải cho tích là số có bốn chữ số).

Tương tự, chữ số hàng chục của số nhân cũng là 1.

Vậy phép nhân như sau :

$$\begin{array}{r} 587 \\ \times\ 11 \\ \hline 587 \\ 587 \\ \hline 6457 \end{array}$$

d) Chữ số 2 đầu tiên của thương nhân với số chia (có một chữ số) cho tích là số có hai chữ số mà khi lấy 10 trừ đi được hiệu là 0 thì dấu * ở số chia phải là 5.

Khi hạ chữ số * hàng chục xuống thì không chia được cho 5. Do đó chữ số hàng chục của thương phải là chữ số 0 (tức thương bây giờ là 20*). Hạ thêm chữ số * hàng đơn vị của số bị chia được số có hai chữ số mà khi nhân hai chữ số hàng đơn vị của thương với 5 phải được đúng số có hai chữ số này (để khi trừ được hiệu là 0).

Mà chữ số hàng đơn vị của thương đã là 7 thì 7 nhân với 5 bằng 35. Do đó hai chữ số cuối cùng của số bị chia là 35.

Vậy phép chia như sau :

```
 1035 | 5
-10   |----
 ---- | 207
   35
  -35
  ---
    0
```

• ***Lời bình :*** Tương tự, hãy giải bài toán :

*"Thay chữ số vào các dấu * của phép nhân và phép chia sau" :*

a)

```
     ***3
  ×
       **
  -------
    ***4
  *****
  -------
  *****4
```

b)

```
 -*******  | **
   **      |-------
 --------- | **2**
  -***
   ***
  -------
     -**
      **
     ---
      0
```

Ta có cách giải sau :

a) Chữ số hàng đơn vị của số nhân phải bằng 8 (vì $3 \times 8 = 24$) và do tích riêng thứ nhất nhỏ hơn tích riêng thứ hai nên chữ số thứ nhất của số nhân là 9. Gọi số bị nhân là A ta có :

$$8A \leq 9994; \qquad 9A \geq 10000$$

Suy ra $1112 \leq A \leq 1249$. Vì A tận cùng bằng 3 nên A có thể là : 1113; 1123; 1133; ...; 1233; 1243.

Vậy phép nhân đã cho có nhiều đáp số.

b) Theo sơ đồ ta thấy rằng :

Khi nhân số chia có hai chữ số với chữ số đầu và chữ số cuối của thương ta được số có ba chữ số. Do đó chữ số đầu và chữ số cuối của thương chỉ có thể là 1, các chữ số thứ hai và thứ tư là 0. Vậy thương là 10 201.

Ở phép trừ thứ nhất, số có ba chữ số trừ đi số có hai chữ số được số có một chữ số là chữ số thứ nhất của tích của số chia với 2 nên nó là 1. Từ đó suy ra ở phép trừ thứ nhất số bị trừ là 100 và số trừ là 99. Nhưng số trừ này bằng số chia vì chữ số thứ nhất của thương là 1, tức là số chia bằng 99.

Vậy số bị chia là : 99.10 201 = 1 009 899.

Ta được phép chia phải tìm như sau :

```
 1009899 | 99
-        |-----
 99      | 10201
-------
   198
-
   198
-------
    99
-
    99
-------
     0
```

20. Số cá mà cháu thứ nhất câu được là : sáu (6) mất đầu là 0. Số cá mà cháu thứ hai câu được là : một nửa của tám (8) cũng là 0. Số cá mà cháu thứ ba câu được là : chín (9) mất đuôi lại cũng là 0.

Tóm lại cả ba cháu đều không câu được con cá nào.

- ***Lời bình :*** Tương tự ta có bài toán sau :

"Một con cá có đuôi nặng 150 gam, đầu cá nặng bằng đuôi cộng nửa thân, thân nặng bằng đầu cộng đuôi. Hỏi cá nặng bao nhiêu ?"

Cách giải như sau :

Gọi đầu là Đ, thân là T và đuôi là đ.

Theo bài ra ta có :

$$Đ = đ + \frac{T}{2} \quad \text{nên} \quad T = 2Đ - 2đ, \quad \text{mà} \quad T = Đ + đ$$

Suy ra $Đ = 3đ = 3.150 = 450$ (gam).

Từ đó $T = 450 + 150 = 600$ (gam).

Vậy cá nặng : $450 + 600 + 150 = 1200$ (gam).

21. Ở vòng thứ hai các số bị xóa là : 6; 21; 36; ...

Ở vòng thứ ba các số bị xóa sẽ là : 11; 26; 41; ...

Sau đó các số bị xóa sẽ lặp lại. Do đó các số bị xóa là những số từ 1 đến 1000 mà khi chia cho 5 dư 1.

Vậy có 200 số như thế, tức là các số còn lại không bị xóa là 800 số.

- ***Lời bình :*** Sau đây là bài toán tương tự :

"Năm hòm đựng số cam như nhau. Nếu ở mỗi hòm lấy ra 60 quả thì số cam còn lại trong năm hòm bằng tổng số cam trong hai hòm lúc đầu. Hỏi lúc đầu mỗi hòm đựng bao nhiêu quả cam ?"

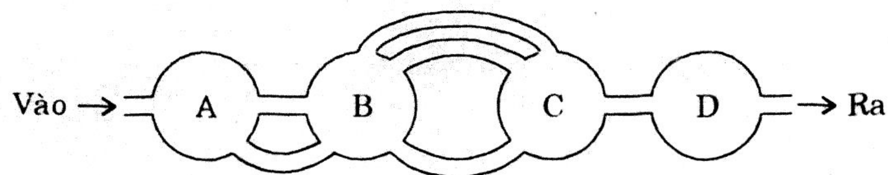
Ta thấy ngay số cam lấy ra là 60.5 = 300 (quả). Theo bài ra thì số cam này bằng tổng số cam lúc đầu của ba hòm. Vậy số cam đựng trong mỗi hòm lúc đầu là : 300 : 3 = 100 (quả).

Lưu ý : trong bài này cho "số cam còn lại trong năm hòm bằng tổng số cam trong hai hòm lúc đầu" có nghĩa là số cam lấy ra bằng tổng số cam trong ba hòm lúc đầu.

D. ĐỐ BẠN GIẢI ĐƯỢC

1. ***Khu vui chơi giải trí ngoài trời*** (hình 2)

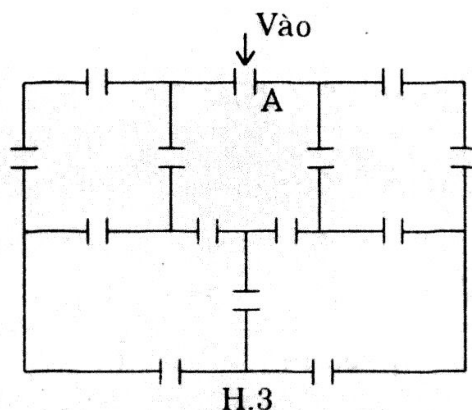
Khu vui chơi này gồm 4 tòa nhà A, B, C, D. Tòa nhà B và C lại nối với nhau bằng hai dãy hành lang. Ra vào đều phải theo đúng chiều mũi tên. Có bao nhiêu cách đi vào ra để đến đủ cả 4 tòa nhà ?



H.2

2. ***Tham quan khu triển lãm*** (hình 3)

Một khu triển lãm gồm rất nhiều phòng trưng bày hiện vật. Các phòng đều có cửa ra vào. Nếu khách tham quan vào phòng A thì sẽ đi như thế nào để vào đủ các phòng và chỉ một lần thôi, sau đó sẽ trở về đúng cửa phòng A, rồi ra về ?



H.3

§2. SỐ NGUYÊN TỐ KHÁC SỐ TỰ NHIÊN NHƯ THẾ NÀO ?

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

1. Tính chia hết của một tổng

a) Nếu tất cả số hạng của một tổng đều chia hết cho cùng một số thì tổng chia hết cho số đó.

b) Nếu chỉ có một số hạng của tổng không chia hết cho một số, còn các số hạng khác đều chia hết cho số đó, thì tổng không chia hết cho số đó.

2. Các dấu hiệu chia hết

a) Các số có chữ số tận cùng là chữ số chẵn thì chia hết cho 2 và chỉ những số đó mới chia hết cho 2.

b) Các số có chữ số tận cùng là 0 hoặc 5 thì chia hết cho 5 và chỉ những số đó mới chia hết cho 5.

c) Các số có tổng các chữ số chia hết cho 3 thì chia hết cho 3 và chỉ những số đó mới chia hết cho 3.

d) Các số có tổng các chữ số chia hết cho 9 thì chia hết cho 9 và chỉ những số đó mới chia hết cho 9.

3. Số nguyên tố và hợp số

a) Nếu có số tự nhiên a chia hết cho số tự nhiên b thì ta nói : a là bội của b, còn b là ước của a.

b) Số nguyên tố là số tự nhiên lớn hơn 1, chỉ có hai ước là 1 và chính nó. Hợp số là số tự nhiên lớn hơn 1, có nhiều hơn hai ước.

c) Phân tích một số tự nhiên lớn hơn 1 ra thừa số nguyên tố là viết số đó dưới dạng một tích các thừa số nguyên tố.

d) Muốn tìm ƯCLN của hai hay nhiều số lớn hơn 1, ta thực hiện ba bước sau:

- Phân tích mỗi số ra thừa số nguyên tố
- Chọn ra các thừa số nguyên tố chung
- Lập tích các thừa số đã chọn, mỗi thừa số lấy với số mũ nhỏ nhất của nó. Tích đó là ƯCLN phải tìm.

e) Muốn tìm BCNN của hai hay nhiều số nguyên tố lớn hơn 1, ta thực hiện ba bước sau :

- Phân tích mỗi số ra thừa số nguyên tố
- Chọn ra các thừa số nguyên tố chung và riêng
- Lập tích các thừa số đã chọn, mỗi thừa số lấy với số mũ lớn nhất của nó. Tích đó là BCNN phải tìm.

B. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

1. Trong các số dạng 101010...101 thì những số nào là số nguyên tố ?

2. Công thức $p_k = \frac{1}{3}(10^k - 7)$ với k = 2, 3, ..., 7, 8 cho ta bảy số nguyên tố. Đó là những số nguyên tố nào ?

3. Tìm tất cả bộ ba số nguyên tố (m, n, p) sao cho $mnp < mn + np + pm$.

4. Chứng minh rằng nếu tổng các bình phương của hai số nguyên chia hết cho 3 thì mỗi một số đó chia hết cho 3.

5. Tìm tất cả những số có bốn chữ số $N = \overline{aabb}$ thỏa mãn điều kiện :

a) $\overline{aab}$ và $\overline{abb}$ đều là những số nguyên tố.

b) $N = p_1.p_2.p_3$ trong đó p_1, p_2, p_3 là các số nguyên tố theo thứ tự có 1, 2, 3 chữ số.

6. Tìm những số có bốn chữ số sao cho mỗi số đều chia hết cho 11 và tổng các chữ số của mỗi số cũng chia hết cho 11.

7. Cho hai số có bốn chữ số $M = \overline{abcd}$ và $N = \overline{dcba}$. Tích M.N là số có tám chữ số mà ba chữ số cuối là 0. Tìm tất cả các tích M.N.

8. Tổng của bốn số tự nhiên liên tiếp là số nguyên tố hay hợp số ?

9. Hai bạn A và B đố nhau tìm lời giải của bài toán : *"Tìm số có bốn chữ số chia hết cho 9 mà số đó chỉ viết với ba chữ số 1, 2, 3."*

Họ đã tìm ra nhiều đáp số khác nhau. Giải thích tại sao.

10. Chứng minh rằng tổng : $T = 2010 + 2010^2 + 2010^3 + ... + 2010^{2010}$ chia hết cho 2011.

11. Chứng minh rằng : Nếu số có ba chữ số $\overline{abc}$ mà chia hết cho 37 thì các số có dạng $\overline{bca}$ và $\overline{cab}$ cũng chia hết cho 37.

12. Có bao nhiêu số có ba chữ số $\overline{pqr}$ (p, q, r ≠ 0) mà mỗi chữ số chia hết cho hiệu hai chữ số kia ?

13. Hãy phân tích số 203 dưới dạng tổng của một vài số tự nhiên để thấy tích các số đó cũng bằng 203.

14. Chứng minh rằng số có ba chữ số $\overline{xyz}$ sau đây :

$\overline{xyz} = \overline{xy} + \overline{yz} + \overline{zx} + \overline{xz} + \overline{zy} + \overline{yx}$ là số chẵn và chia hết cho 11.

15. Tìm số có ba chữ số chia hết cho 9 biết rằng chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị và tích ba chữ số bằng 0.

16. Thay dấu * bằng các chữ số thích hợp :

$*2**:9* = ***$, biết rằng số chia 9* là số lẻ.

17. Bộ ba số (3; 5; 7) là bộ ba số nguyên tố liên tiếp. Trong tập hợp các số tự nhiên còn có bộ ba số lẻ liên tiếp nào là bộ ba số nguyên tố nữa không ?

18. Cho số $\overline{xyxxyx}$ có sáu chữ số và là bội của 9. Biết rằng nó chia hết cho số có bốn chữ số $\overline{xxxx}$. Tìm thương của phép chia này.

C. CÁCH GIẢI VÀ LỜI BÌNH

1. Ta biết rằng số 101 (chứa hai chữ số 1) là số nguyên tố. Ta hãy xét xem ngoài số 101 còn có số nguyên tố nào nữa không.

Nếu số đã cho N chứa m > 2 chữ số 1 thì số 11N chứa 2m chữ số 1 và như vậy nó chia hết cho số p gồm m chữ số 1.

Nếu m lẻ thì p không chia hết cho 11, do đó N chia hết cho p, nếu m chẵn thì p chia hết cho 11, do đó N chia hết cho thương $\frac{p}{m}$. Như thế với m > 2 chữ số 1 thì N là hợp số. Vì vậy trong các số dạng 101010...101 chỉ có một số nguyên tố duy nhất là 101.

• ***Lời bình :*** *Trong các số có bốn chữ số giống nhau $\overline{aaaa}$ thì số nào chỉ có hai ước nguyên tố ? Đó là hai ước nguyên tố nào ?*

Trước hết ta thấy rằng số $\overline{aaaa}$ có thể viết dưới dạng :

$$\overline{aaaa} = \overline{aa}.101 = \overline{a}.11.101$$

Muốn số này có hai ước nguyên tố thì thừa số a phải bằng 1 (vì 1 không phải là số nguyên tố). Vậy số phải tìm là 1111 có hai ước nguyên tố là 11 và 101.

2. Ta lần lượt thay k = 2, 3, 4, 5, 6, 7 và 8. Ta được :

Với k = 2 thì công thức đã cho có giá trị :

$$p_2 = \frac{1}{3}(10^2 - 7) = \frac{93}{3} = 31$$

Với k = 3 ta có : $p_3 = \frac{1}{3}(1000 - 7) = \frac{993}{3} = 331$

Với k = 4 ta có : $p_4 = \frac{1}{3}(10000 - 7) = \frac{9993}{3} = 3331.$

Với k = 5, 6, 7 và 8 ta lần lượt được các số nguyên tố sau :

$p_5 = 33\,331$; $p_6 = 333\,331$; $p_7 = 3\,333\,331$ và $p_8 = 33\,333\,331$.

• ***Lời bình :*** Tương tự, *"Chứng minh rằng : nếu p và $p^2 + 2$ là hai số nguyên tố thì số $p^3 + 2$ cũng là số nguyên tố".*

Để giải bài này ta nhận xét rằng : mọi số nguyên tố khác 3 đều có dạng p = 3k ± 1, trong đó k là số nguyên nào đó.

Nếu $p = 3k + 1$ thì $p^2 + 2 = 9k^2 + 6k + 3$ chia hết cho 3.

Nếu $p = 3k - 1$ thì $p^2 + 2 = 9k^2 - 6k + 3$ cũng chia hết cho 3.

Do $p > 2$ thì cả hai trường hợp số $p^2 + 2$ đều lớn hơn 3 và chia hết cho 3, tức là $p^2 + 2$ là hợp số. Thành thử $p^2 + 2$ chỉ có thể là số nguyên tố khi $p = 3$ (khi đó $p^2 + 2 = 11$ là số nguyên tố).

Vậy : $p^3 + 2 = 27 + 2 = 29$ là số nguyên tố.

3. Trước tiên ta biến đổi bất đẳng thức $mnp < mn + np + pm$ (*) dưới một dạng khác. Ta nhận thấy rằng $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = \frac{mn + np + pm}{mnp}$ nên (*) có thể viết : $\frac{mn + np + pm}{mnp} > 1$, do đó : $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} > 1$ (1)

Không làm mất tính tổng quát ta giả sử $m \geq n \geq p$, tức là :

$$\frac{1}{m} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{p} \quad (2)$$

Như vậy : $$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} \geq \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} = \frac{3}{m} \quad (3)$$

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = \frac{3}{p} \quad (4)$$

Từ (1) và (4) suy ra $\frac{3}{p} > 1$ hay $p < 3$, mà p là số nguyên tố nên $p = 2$.

Thay $p = 2$ vào (1) được : $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2} > 1$ hay $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$.

Từ (2) ta có : $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$, do đó $\frac{2}{n} > \frac{1}{2}$ hay $n < 4$, mà n là số nguyên tố nên $n = 2$ hoặc $n = 3$.

Bây giờ ta phải tìm m. Muốn thế ta thay $n = 2$ hoặc 3 sẽ được :

Nếu $n = 2$ thì $\frac{1}{m} + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$ hay $\frac{1}{m} > 0$, $m > 0$, mà m là số nguyên tố ≥ 2 nên suy ra m có thể là bất cứ số nguyên tố nào.

Nếu $n = 3$ thì $\frac{1}{m} + \frac{1}{3} > \frac{1}{2}$ hay $\frac{1}{m} > \frac{1}{6}$. Suy ra $m < 6$, mà m là số nguyên tố nên $m = 2$; $m = 3$ hoặc $m = 5$.

Vậy bộ ba số nguyên tố phải tìm là : (3; 3; 2), hoặc (5; 3; 2), hoặc (2; 3; 2), hoặc (m; 2; 2) và m là bất cứ số nguyên tố nào.

- ***Lời bình :*** Bài toán trên yêu cầu phải biện luận để tìm ra được bộ ba số nguyên tố thỏa mãn một bất đẳng thức cho trước. Nhưng với bài toán sau :

"Tìm ba số lẻ liên tiếp đều là số nguyên tố."

thì điều kiện phải là ba số lẻ liên tiếp (vì chỉ có 2 là số chẵn duy nhất là số nguyên tố).

Để giải bài toán ta gọi ba số lẻ liên tiếp là $n - 2$, n, $n + 2$ (với $n > 3$) và chứng minh rằng trong ba số này luôn có một số chia hết cho 3.

Thật vậy, nếu n chia hết cho 3 thì ta đã chứng minh xong, nếu n chia cho 3 dư 1 hoặc 2 thì $n + 2$ hoặc $n - 2$ sẽ chia hết cho 3. Vậy $n = 5$, từ đó $n - 2 = 3$, $n + 2 = 7$. Do đó ba số lẻ liên tiếp là ba số nguyên tố là : 3; 5 và 7.

- Nếu phải *"tìm hai số lẻ liên tiếp là số nguyên tố"* thì ta sẽ tìm được nhiều cặp số như sau :

3 và 5;	5 và 7;	11 và 13;	17 và 19;	29 và 31;
41 và 43;	59 và 61;	71 và 73;	101 và 103;	107 và 109;
137 và 139;	191 và 193;	197 và 199;	v.v...	

Tất cả những cặp số này gọi là *cặp số nguyên tố sinh đôi* (hiệu của chúng bằng 2).

4. Ta biết rằng : mỗi số nguyên hoặc chia hết cho 3 hoặc chia cho 3 dư 1 hoặc 2.

Nếu số n chia hết cho 3 tức là $n = 3k$ thì bình phương của nó là $9k^2$ rõ ràng chia hết cho 3.

Nếu n khi chia cho 3 dư 1 tức là $n = 3k + 1$ thì bình phương của nó là $n^2 = 3(3k^2 + 2k) + 1$ khi chia cho 3 cũng dư 1.

Nếu n khi chia cho 3 dư 2 tức là $n = 3k + 2$ thì bình phương của nó là $n^2 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$ khi chia cho 3 dư 1.

Như thế, nếu một trong hai số không chia hết cho 3 thì bình phương của nó khi chia cho 3 sẽ dư 1, vì thế tổng các bình phương của hai số này khi chia cho 3 sẽ dư 1. Còn nếu cả hai đều không chia hết cho 3 thì tổng các bình phương của chúng khi chia cho 3 sẽ dư 2.

Vậy tổng các bình phương của hai số nguyên chỉ chia hết cho 3 trong trường hợp mỗi số chia hết cho 3.

- ***Lời bình :*** *Nếu ta thay điều kiện chia hết cho 3 bằng chia hết cho 7 thì như thế nào ?*

Ta hãy bình phương các số từ 0 đến 6 ta sẽ thấy rằng các bình phương tìm được khi chia cho 7 sẽ cho số dư là 0, 1, 2 và 4. Vì không có hai trong bốn số này, trừ cặp số 0, có tổng chia hết cho 7 nên tổng các bình phương của hai số nguyên chỉ chia hết cho 7 khi mỗi số chia hết cho 7.

- Nhà toán học lỗi lạc Ơle đã đặt vấn đề : *"Tồn tại hay không số z mà $1 + z^2$ chia hết cho số nguyên tố p ?"*

Ông đã chứng minh rằng : Điều này chỉ thực hiện được với các số p dạng 4k + 1 (tức là với các số nguyên tố p = 5, 13, 17, 29, ...) và không thực hiện được với các số p dạng 4k + 3 (tức là với các số nguyên tố 3, 7, 11, 19, 23, ...).

Chẳng hạn với z = 2 thì $1 + z^2 = 5$ chia hết cho 5, với z = 5 thì $1 + z^2 = 26$ chia hết cho 13.

5. Do $\overline{aab}$ là số nguyên tố, tức là 110a + b là số nguyên tố, ta có b = 1; 3; 7 hoặc 9. Từ điều kiện thứ nhất ta có : N = 11(100a + b).

Theo bảng số nguyên tố ta tìm được các cặp số nguyên tố $\overline{aab}$ và $\overline{abb}$ sau đây :

(223; 233); (227; 277); (331; 311); (443; 433);

(449; 499); (557; 577); (773; 733); (881; 811);

(887; 877); (991; 911) và (997; 977).

Tương ứng với 100a + b là các số sau :

203 = 7.29; 207 = 9.23; 301 = 7.43; 403 = 13.31;

409 là số nguyên tố; $507 = 3.13^2$; 703 = 19.37; $801 = 3^2.89$;

807 = 3.269; 901 = 17.53 và 907 là số nguyên tố.

Vậy N = 8877 = 3.11.269.

- ***Lời bình :*** Xét thêm một bài toán tương tự về số nguyên tố :

"Tìm tổng tất cả những số có ba chữ số mà mỗi số đó là tích của 4 số nguyên tố phân biệt."

Bài ra yêu cầu mỗi số phải là tích của 4 số nguyên tố phân biệt, do đó ta hãy tìm những bộ 4 số nguyên tố trong đó mỗi số sau lớn hơn số trước.

Vì các tích 2.3.5 = 30; 2.3.7 = 42; 2.3.11 = 66; nên thừa số thứ tư của các tích này sẽ là các số tương ứng sau : 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31; 11, 13, 17, 19, 23; và 13. Tổng tất cả các tích này bằng :

$$30(7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 + 29 + 31) +$$
$$+ 42(11 + 13 + 17 + 19 + 23) + 63.13 = 8844.$$

Do 2.3.13.17 > 1000 nên không còn có bộ 4 số nào bắt đầu bằng 2 và 3.

Nếu bộ 4 số bắt đầu bằng 2 và 5 thì ta có các bộ sau đây :

2.5.7.11 = 770 và 2.5.7.13 = 910.

Do các tích 2.7.11.13 và 3.5.7.11 đều lớn hơn 1000 nên không còn bộ 4 số nào thỏa mãn điều kiện của đề bài.

Vậy tổng cần tìm là : 8844 + 770 + 910 = 10 524.

6. Gọi số phải tìm là $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$.

Theo bài ra ta có : $a + b + c + d = 11$ (1)

Theo dấu hiệu chia hết cho 11, ta có thể viết :

$$(a + c) - (b + d) = 11.k \quad (2)$$

Do a, b, c, d không thể lớn hơn 9 nên k chỉ có thể là 0, 1.

Chẳng hạn nếu k = 2 thì $(a + c) - (b + d) = 22$, không thể xảy ra.

Cộng (1) và (2) từng vế ta có :

$$\begin{array}{l} \quad (a + c) + (b + d) = 11 \\ + \\ \quad (a + c) - (b + d) = 11.k \quad (3) \\ \hline 2(a + c) = 11(1 + k) \end{array}$$

Vế trái là số chẵn nên vế phải cũng phải là số chẵn, suy ra $k \neq 0$.

Trừ (1) và (3) từng vế ta có :

$$\begin{array}{l} \quad (a + c) + (b + d) = 11 \\ - \\ \quad (a + c) - (b + d) = 11.k \quad (3) \\ \hline 2(b + d) = 11(1 - k) \end{array}$$

Vì k = 1 nên b + d = 0. Điều này chỉ xảy ra khi b = 0 và d = 0. Từ (3) với k = 1 ta có a + c = 11. Nhưng nếu a thay đổi từ 2 đến 9 thì c thay đổi từ 9 đến 2.

Suy ra các số có bốn chữ số sau đây thỏa mãn bài ra (8 số) :

2090, 3080, 4070, 5060, 6050, 7040, 8030, 9020.

- ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau :

"Chứng minh rằng trong 39 số tự nhiên liên tiếp phải có một số mà tổng các chữ số chia hết cho 11."

Trước hết ta nhận xét rằng : trong 20 số đầu tiên từ các số đã cho ta tìm được hai số mà chữ số cuối cùng là 0.

Giả sử một trong hai số đó trước chữ số 0 là chữ số không bằng 9. Gọi số đó là A và t là tổng các chữ số của nó.

Thế thì các số A, A + 1, ..., A + 9, A + 10 nằm trong 39 số đã cho và có tổng các chữ số là t, t + 1, t + 2, ..., t + 10. Nhưng trong 11 số liên tiếp ít nhất cũng có một số chia hết cho 11.

7. Ta thấy ngay rằng các chữ số d và a phải khác 0 vì d = 0 thì N là số có ba chữ số (!). Theo bài ra, tích M.N phải chia hết cho 1000, tức cho 8.125. Nhưng M và N không thể đồng thời chia hết cho 8 và 125, vì sẽ chia hết cho 10 tức là tận cùng bằng 0 (trái với điều kiện $a \neq 0$, $d \neq 0$).

Thế thì : $M = \overline{abcd} = 1000a + \overline{bcd}$ nên cả hai số hạng này đều chia

hết cho 125; do $0 < d \le 9$ nên d = 5. Suy ra những số hạng $\overline{bc5}$ chia hết cho 125 chỉ có thể là :

$$125.1 = 125; \quad 125.3 = 375; \quad 125.5 = 625; \quad 125.7 = 875.$$

Do đó M = $\overline{a125}$, $\overline{a375}$, $\overline{a625}$, $\overline{a875}$.

Từ đó ta phải tìm chữ số a để các số N = $\overline{521a}$, $\overline{573a}$, $\overline{526a}$, $\overline{578a}$ chia hết cho 8.

Muốn vậy cho a = 0, ví dụ $\overline{521a}$ hay 5210 chia cho 8 dư 2, thêm 6 vào để được 8 và số 5216 chia hết cho 8.

Vậy ta được cặp số M.N = 6125.5216 = 31948000 tận cùng bằng ba chữ số 0.

Tương tự ta được thêm ba cặp số nữa là :

6375 và 5736; 4625 và 5264 và 4875 và 5784

mà tích M.N cũng tận cùng bằng ba chữ số 0.

- ***Lời bình :*** *"Tính tích M.N biết rằng M được viết bằng 100 chữ số 3, N được viết bằng 100 chữ số 6".*

Khác với bài trên ở đây M và N không phải là số có bốn chữ số mà tích M.N phải là số có rất nhiều chữ số.

Với nhận xét là 3 = 9 : 3 và 6 = 3.2, ta có thể viết tích

$$M.N = (\underbrace{33...3}_{100 \text{ chữ số } 3}).(\underbrace{66...6}_{100 \text{ chữ số } 6}) = (\underbrace{99...9}_{100 \text{ chữ số } 9}).(\underbrace{22...2}_{100 \text{ chữ số } 2})$$

$$= (10^{100} - 1).\underbrace{22...2}_{100 \text{ chữ số } 2}$$

$$= \underbrace{22...2}_{100 c/s 2}\underbrace{00...0}_{100 c/s 0} - \underbrace{22...2}_{100 c/s 2} = \underbrace{22...2}_{99 c/s 2}1\underbrace{77...7}_{99 c/s 7}8.$$

8. Trong bốn số liên tiếp thì có hai số chẵn (mà tổng của chúng là số chẵn) và hai số lẻ (mà tổng của chúng cũng là số chẵn). Do đó tổng của bốn số liên tiếp là một số chẵn lớn hơn 2, vậy tổng này là một hợp số.

- ***Lời bình :*** *"Nếu tổng của ba số tự nhiên liên tiếp là một số lẻ thì tích của chúng chia hết cho 24. Chứng minh điều này."*

Điều kiện là tổng là một số lẻ vì tổng có thể là một số chẵn (chẳng hạn 5 + 6 + 7 = 18). Khi tổng ba số tự nhiên liên tiếp là một số lẻ thì rõ ràng số thứ nhất và số thứ ba phải là số chẵn (chẳng hạn 6 + 7 + 8 = 21) và một trong chúng phải là bội của 4. Vậy tích các số chẵn đó chia hết cho 8.

Nhưng trong ba số tự nhiên liên tiếp thì luôn có một số chia hết cho 3. Do đó tích này chia hết cho 3.8 = 24.

9. Ta phải tìm xem tại sao số N thỏa mãn bài ra không thể viết với bốn chữ số 3 hoặc ba chữ số 3 mà lại phải có chữ số 3. Từ đó mà xét hai trường hợp tùy theo N có một chữ số 3 hoặc có hai chữ số 3. Thật vậy :

Nếu N có bốn chữ số 3 thì tổng các chữ số 3 + 3 + 3 + 3 = 12 không chia hết cho 9. Nếu N có ba chữ số 3 thì tổng 3 + 3 + 3 + 1 = 10 không chia hết cho 9 hoặc tổng 3 + 3 + 3 + 2 = 11 cũng không chia hết cho 9.

Nhưng theo bài ra N phải có chữ số 3 vì nếu toàn là chữ số 1 hoặc chữ số 2 thì tổng các chữ số sẽ nhỏ hơn 9 nên không chia hết cho 9. Vậy còn lại hai trường hợp :

a) N có một chữ số 3. Khi đó N còn lại ba chữ số 2 ta được các số :

2223, 2232, 2322, 3222.

b) N có hai chữ số 3. Khi đó N còn lại hai chữ số là 1 và 2, ta được các số sau : 1332, 1323, 1233

2331, 2313, 2133

và 3312, 3321, 3132, 3231, 3123, 3213.

Vậy có tất cả 16 đáp số.

- ***Lời bình :*** *Bạn hãy lấy năm sinh của bạn trừ đi tổng bốn chữ số tạo thành năm sinh đó. Tại sao lại được hiệu là một số chia hết cho 9 ?*

Gọi số năm sinh của bạn là $\overline{abcd}$ tức là 1000a + 100b + 10c + d (1)

Tổng các chữ số của năm sinh là a + b + c + d (2)

Ta lập hiệu (1) – (2) được : 999a + 99b + 9c = 9(111a + 11b + c)

Rõ ràng số này luôn chia hết cho 9.

10. Ta hãy ghép các số hạng của tổng T là lũy thừa liên tiếp chẳng hạn $2010 + 2010^2$ để làm xuất hiện thừa số chung 1 + 2010 = 2011, vì :

$$2010 + 2010^2 = 2010(1 + 2010) = 2010.2011$$

Ghép như vậy ta được :

$$\begin{aligned} T &= (2010 + 2010^2) + (2010^3 + 2010^4) + ... + (2010^{2009} + 2010^{2010}) \\ &= 2010(1 + 2010) + 2010^3(1 + 2010) + ... + 2010^{2009}(1 + 2010) \\ &= 2011(2010 + 2010^3 + ... + 2010^{2009}) \end{aligned}$$

luôn chia hết cho 2011.

- ***Lời bình :***

Nếu tổng là các lũy thừa liên tiếp của 2010 thì ta đã chứng minh được tổng này chia hết cho 2010 + 1 = 2011. Do đó một cách tổng quát : *Nếu tổng là các lũy thừa liên tiếp của n thì chứng minh được tổng chia hết cho n + 1.* Chẳng hạn tổng $11 + 11^2 + 11^3 + ... + 11^{2100}$ luôn chia hết cho 11 + 1 = 12.

11. Ta nhận thấy rằng :

Tổng $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 111(a + b + c) = 37.3(a + b + c)$ chia hết cho 37.

Do $\overline{abc}$ chia hết cho 37 tức là $(100a + 10b + c)$ chia hết cho 37 nên :

$$\overline{bca} = 100b + 10c + a = 10(100a + 10b + c) - 999a.$$

Số bị trừ và số trừ đều chia hết cho 37 nên hiệu $\overline{bca}$ chia hết cho 37.

Tổng $\left(\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}\right)$ chia hết cho 37, mà hai số hạng đầu đã chia hết cho 37 thì số hạng thứ ba $\overline{cab}$ cũng chia hết cho 37.

Ví dụ : Số 259 chia hết cho 37 (thương là 7), ta cũng có 592 chia hết cho 37 (thương là 16) và 925 chia hết cho 37 (thương là 25).

• ***Lời bình :***

Lưu ý rằng số gồm ba chữ số giống nhau $\overline{aaa}$ chia hết cho 37, vì $\overline{aaa} = a.111$, mà $111 = 37.3$ nên $\overline{aaa} = 37.3a$ luôn chia hết cho 37.

Ngoài ra, *số $\overline{aaabbb}$ cũng chia hết cho 37. Tại sao ?*

$$\text{Vì } \overline{aaabbb} = 1000.\overline{aaa} + \overline{bbb}$$
$$= 1000.111a + 111b$$
$$= 111(1000a + b)$$

mà 111 chia hết cho 37 nên số $\overline{aaabbb}$ cũng chia hết cho 37.

12. Rõ ràng ba chữ số p, q, r phải khác nhau và giả sử $p < q < r$.

a) Nếu $p = 1$ thì $r - q = 1$, ta có các số sau đây :

123; 124; ...; 189, trong đó chỉ có hai số 123 và 134 là thỏa mãn đề bài.

b) Nếu $p = 2$ thì $r - q = 1$ hoặc 2.

- Với $r - q = 1$ thì $r = q + 1$ chia hết cho $q - 2$, hiệu của chúng là $3 = (q + 1) - (q - 2)$ chia hết cho $q - 2$. Điều này chỉ xảy ra khi $q = 3$ hoặc 5.
- Với $r - q = 2$ thì $(q + 2)$ chia hết cho $(q - 2)$, hiệu của chúng là 4 chia hết cho $q - 2$. Điều này chỉ xảy ra khi $q = 3$ hoặc 4 hoặc 5. V. ta được các số : 234, 256, 245, 246, 268, trong đó chỉ có ba số 245, 246 và 268 thỏa mãn đề bài.

c) Nếu $p = 3$ thì tương tự như trên ta được bốn số thỏa mãn đề bài là :

345, 347, 358 và 369.

d) Nếu $p \geq 4$ ta sẽ được bốn số nữa là : 459, 567, 589 và 789.

Tóm lại tất cả có : $2 + 3 + 4 + 4 = 13$ (số) thỏa mãn đề bài.

• ***Lời bình :***

Ta biết rằng số $\overline{pqr}$ có thể đổi chỗ các chữ số cho nhau và được 6 số là :

$$\overline{pqr}, \overline{prq}, \overline{qpr}, \overline{qrp}, \overline{rpq} \text{ và } \overline{qrp}.$$

Do đó nếu đổi chỗ các chữ số trong 13 số thỏa mãn đề bài ở trên ta sẽ được tất cả : 13.6 = 78 (số).

13. Ta có thể phân tích như sau :

$$203 = 7 + 29 + \underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{167c/s} = 7.29.\underbrace{1.1...1}_{167c/s}$$

• ***Lời bình :*** Một câu hỏi đặt ra : *"Có số tự nhiên nào không thể viết dưới dạng vừa là tổng vừa là tích của một vài số tự nhiên khác ?"*

Trả lời đó là các số nguyên tố.

• Liên quan đến câu hỏi trên là câu hỏi sau :

"Tìm các giá trị tự nhiên k sao cho đẳng thức

$$a_1 + a_2 + ... + a_k = a_1.a_2...a_k$$

thỏa mãn với các giá trị của a tự nhiên".

Ta thấy ngay rằng :

Với k = 1 thì $a_1 = 1$

Với k = 2 thì $a_1 = a_2 = 2$

Với k > 2 thì $a_1 = a_2 = ... = a_{k-2} = 1$, $a_{k-1} = 2$, $a_k = k$.

14. Ta có thể viết : $\overline{xyz} = \overline{xy} + \overline{yz} + \overline{zx} + \overline{xz} + \overline{zy} + \overline{yx}$ dưới dạng sau :

$$\begin{aligned}100x + 10y + z &= 10x + y + 10y + z + 10z + x + 10x + z + 10z + y + 10y + x\\ &= 22x + 22y + 22z\\ &= 22.(x + y + z)\end{aligned}$$

Do 22 là số chẵn chia hết cho 11, nên số $\overline{xyz}$ là số chẵn chia hết cho 11.

• ***Lời bình :*** *"Nếu chữ số hàng trăm x = 1 thì số $\overline{xyz}$ bằng bao nhiêu ?"*

Theo trên nếu x = 1 thì ta có : $\overline{1yz} = 22(1 + y + z)$.

Do $\overline{1yz} < 200$ nên $(1 + y + z).22 < 200$. Suy ra $1 + y + z < 10$ hay $y + z < 9$

Nhưng $\overline{1yz}$ chia hết cho 22 nên $\overline{1yz}$ chỉ có thể là : 110, 132, 154, 176, 798. Đối chiếu với y + z < 9 thì chỉ còn lại số 132 là thỏa mãn (thật thế : 132 = (1 + 3 + 2).22).

15. Gọi số phải tìm là $\overline{xyz}$. Do tích ba chữ số của nó bằng 0 nên phải có một chữ số là 0. Nhưng 0 không thể là chữ số hàng trăm, 0 cũng

không thể là chữ số hàng chục (vì y > z) do đó chữ số hàng đơn vị z = 0.

Số $\overline{xyz}$ phải chia hết cho 9 nên tổng x + y của $\overline{xy0}$ phải chia hết cho 9, tức là :

$$x + y = 1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5.$$

Vậy số phải tìm là : 180, 810, 270, 720, 360, 630, 450 và 540 (tất cả có 8 số).

- ***Lời bình :*** Nếu bài ra là : *"Tìm số có hai chữ số mà tổng hai chữ số đó bằng 10 và lấy nó trừ đi số viết theo thứ tự ngược lại sẽ được một số tận cùng bằng 2"* thì cách giải như thế nào ?

Trước hết ta có nhận xét : số có hai chữ số $\overline{ab}$ (a > b) trừ đi số viết theo thứ tự ngược lại $\overline{ba}$ luôn chia hết cho 9.

Thật vậy : $\overline{ab} - \overline{ba} = 10a + b - (10b + a) = 9a - 9b = 9(a - b)$ chia hết cho 9.

Do hiệu này tận cùng bằng 2 nên hiệu phải bằng 72. Suy ra tổng hai số là 110 và hiệu của chúng là 72. Biết tổng và hiệu của hai số ta tìm được ngay đó là số 91 và số viết theo thứ tự ngược lại là 19 (rõ ràng 91 − 19 = 72 và 72 chia hết cho 9).

16. Vì thương là số có ba chữ số nên chữ số đầu tiên của số bị chia là 9 và số chia là số lẻ 91. Do đó phép chia 92** cho 91 như sau :

```
 _92**  | 91
  91    |----
 -----  | 10
    1*
 -----
   1**
```

Phép chia này chỉ thực hiện được khi số 1** là bội của 91, tức là khi 1** = 182.

Vậy ta có phép chia sau : 9282 : 91 = 102.

- ***Lời bình :*** Sau đây là bài toán tương tự :

"Thay dấu bằng chữ số thích hợp trong phép chia sau :

```
 _****  | 11
   **   |----
 -----  | **
   _3*
    **
 -----
     0
```

"

Cách giải như sau :

Bội của 11 là số lớn nhất có hai chữ số, đó là số 99. Do đó ta có sơ đồ phép chia sau đây :

```
  ****  | 11
-       |----
  99    | 9*
 -----
   3*
-
   **
 -----
    0
```

Số có ba chữ số tạo bởi ba chữ số đầu của số bị chia là tổng 99 + 3 = 102. Số duy nhất có dạng 3* chia hết cho 11 là số 33.

Vậy ta có phép chia sau :

```
  1023  | 11
-       |----
  99    | 93
 -----
   33
-
   33
 -----
    0
```

17. Giả sử tồn tại một bộ ba số nguyên tố liên tiếp khác. Các số này là số nguyên tố và khác 3 nên không có số nào chia hết cho 3 (*).

Gọi số nhỏ nhất trong ba số liên tiếp đó là $3n + 1$ thì số tiếp theo là $3n + 3$ chia hết cho 3. Nếu số nhỏ nhất có dạng $3n - 1$ thì số cuối cùng của bộ ba này là $(3n - 1) + 4 = 3n + 3$ cũng chia hết cho 3. Cả hai trường hợp đều mâu thuẫn với (*). Vậy không còn có bộ ba số nguyên tố liên tiếp nào nữa, nói cách khác bộ ba số nguyên tố (3; 5; 7) là duy nhất.

- ***Lời bình :*** Có thể giải thêm bài toán sau :

"Tích của ba số nguyên tố có dạng $\overline{ab}$, $\overline{ac}$ và $\overline{aa} - 1$ bằng bao nhiêu ?"

Trước hết ta tìm số nguyên tố có dạng $\overline{aa} - 1$. Trong tất cả các số có dạng $\overline{aa}$ (như 11; 22; ...; 88; 99) chỉ có số $\overline{aa} = 44$ mà $\overline{aa} - 1 = 44 - 1 = 43$ là số nguyên tố. Suy ra a = 4.

Trong các số có hai chữ số mà chữ số hàng chục là 4 tức là các số 40; 41 ...; 48; 49 thì có ba số nguyên tố là 41; 43 và 47.

Vậy tích : 41.43.47 = 82861.

18. Số $\overline{xyxxyx}$ có thể viết : $\overline{xyx}.1001 = \overline{xyx}.7.11.13$.

Số $\overline{xxxx}$ có thể viết : $\overline{xx}.101 = x.11.101$.

Theo bài ra số thứ nhất chia hết cho số thứ hai nên trong các ước của số thứ hai có số nguyên tố 101, do đó phép chia hết chỉ thực hiện được khi $\overline{xyx}$ chia hết cho 101. Điều này chỉ xảy ra khi x.y = 0.

Số $\overline{x0x}$ lại là bội của 9 nên trong các số có dạng $\overline{x0x}$ là bội của 9 chỉ

có số 909 là thích hợp. Suy ra x = 9.

Vậy thương của phép chia là 909.7.11.13 cho 9.11.101 là 7.13 = 91.

- ***Lời bình :*** Một bài toán khác về số có ba chữ số là bội của 9 như sau :

  "Tìm số $\overline{xyz}$ là bội của 9 trong đó chữ số y lớn hơn chữ số z là 4 và tích x.y.z bằng 0."

  Bài ra cho tích ba chữ số bằng 0, do đó số phải tìm phải có một chữ số là 0. Nhưng x không thể bằng 0 (vì như thế số đã cho có hai chữ số) nên chỉ có thể là y = 0 hoặc z = 0. Do y lớn hơn z là 4 nên số phải tìm có dạng $\overline{*40}$. Số này lại phải là bội của 9 nên x phải bằng 5.

  Vậy số phải tìm là 540.

D. ĐỐ BẠN GIẢI ĐƯỢC

Biểu thị các số

1. Biểu thị số 65 536 bằng bốn chữ số 2.

2. Biểu thị số 1 bằng :

a) ba chữ số 1, 2, 3

b) tất cả mười chữ số (từ 0; 1; 2; ...; 9).

§3. HÀNG NGŨ PHÂN SỐ VỚI CÁC PHÉP TÍNH

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

1. Mở rộng khái niệm phân số

a) Người ta gọi $\frac{a}{b}$ (với a, b ∈ **Z**, b ≠ 0) là một phân số, a là tử và b là mẫu của phân số.

Hai phân số $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$ gọi là bằng nhau nếu a.d = b.c.

b) Nếu nhân cả tử và mẫu với cùng một số nguyên khác 0 thì được một phân số bằng phân số đã cho.

Nếu chia cả tử và mẫu cho cùng một ước chung thì được một phân số bằng phân số đã cho.

2. Rút gọn phân số và quy đồng mẫu

a) Muốn rút gọn một phân số, ta chia cả tử và mẫu cho một ước chung (khác ±1) của chúng.

Phân số tối giản là phân số mà tử và mẫu chỉ có ước chung là 1 và −1.

b) Muốn quy đồng mẫu nhiều phân số (với mẫu dương) ta làm như sau :

- Tìm một bội chung của các mẫu (thường là BCNN) để làm mẫu chung.
- Tìm thừa số phụ của mỗi mẫu (chia mẫu chung cho từng mẫu).
- Nhân tử và mẫu của mỗi phân số với thừa số phụ tương ứng.

c) Trong hai phân số cùng mẫu dương, phân số nào có tử lớn hơn thì lớn hơn. Muốn so sánh hai phân số khác mẫu, ta viết chúng dưới dạng hai phân số cùng mẫu dương rồi so sánh các tử với nhau : phân số nào có tử lớn hơn thì lớn hơn.

3. Các phép tính về phân số

a) Muốn cộng hai phân số cùng mẫu, ta cộng các tử và giữ nguyên mẫu. Muốn cộng hai phân số khác mẫu, ta viết chúng dưới dạng hai phân số cùng một mẫu rồi cộng các tử và giữ nguyên mẫu chung.

b) Muốn trừ một phân số cho một phân số, ta cộng số bị trừ với số đối của số trừ.

c) Muốn nhân hai phân số, ta nhân các tử với nhau và nhân các mẫu với nhau.

d) Muốn chia một phân số hay một số nguyên cho một phân số, ta nhân số bị chia với số nghịch đảo của số chia.

B. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

1. Nhân tử và mẫu của hai phân số $\frac{7}{9}$ và $\frac{8}{9}$ lần lượt với 2, 3, 4, ..., 8 ta sẽ được những cặp phân số mới. Hỏi trong số đó có bao nhiêu phân số lớn hơn $\frac{7}{9}$ nhưng nhỏ hơn $\frac{8}{9}$ mà mẫu chỉ có 1 chữ số ?

2. Viết số 100 dưới dạng một hỗn số với sáu chữ số 9.

3. Cho phân số $\frac{52\,367}{47\,633}$. Hãy tìm số n sao cho khi cộng mẫu với nó và lấy tử trừ đi nó rồi rút gọn sẽ được phân số tối giản $\frac{17}{83}$.

4. Nói phân số $\frac{a}{94}$ là tối giản nếu a là số nguyên tố thì đúng hay sai ? Cũng hỏi như thế với phân số $\frac{b}{175}$ và b là số nguyên tố.

5. Biết rằng biểu thức : $\frac{1.2.3 + 2.4.6 + 4.8.12 + 7.14.21}{1.3.5 + 2.6.10 + 4.12.20 + 7.21.35} = \frac{a}{b}$.

Tìm phân số $\frac{a}{b}$.

6. Viết phân số $\frac{1}{7}$ dưới dạng một số thập phân. Có nhận xét gì về số thập phân đó ? Chữ số thập phân thứ 100 sau dấu phẩy là chữ số gì ?

7. Tìm năm phân số nhỏ hơn $\frac{3}{8}$ và lớn hơn $\frac{1}{5}$.

8. Cho hai phân số $\frac{35}{396}$ và $\frac{28}{297}$. Tìm số nhỏ nhất mà khi chia cho mỗi phân số ta được các số tự nhiên.

9. Tìm hai phân số biết rằng hiệu của chúng bằng $44\frac{1}{2}$ và nếu tăng phân số bé lên 7 lần thì hiệu sẽ bằng $10\frac{3}{14}$.

10. Phải chia 5115 quả cam thành bao nhiêu phần để phần thứ nhất bằng $\frac{1}{2}$ phần thứ hai, phần thứ hai bằng $\frac{1}{2}$ phần thứ ba, phần thứ ba bằng $\frac{1}{2}$ phần thứ tư, v.v..., biết rằng theo cách chia này thì phần thứ năm được 80 quả cam.

11. So sánh hai phân số $\frac{47}{73}$ và $\frac{4747}{7373}$. Rút ra nhận xét để chứng tỏ rằng tại sao hai phân số sau lại bằng nhau : $\frac{61}{411}$ và $\frac{61061}{411411}$.

12. Tính nhanh các biểu thức sau :

a) $\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}+\frac{1}{110}+\frac{1}{132}$

b) $\frac{4}{5.7}+\frac{4}{7.9}+\frac{4}{9.11}+...+\frac{4}{57.59}+\frac{4}{59.61}$.

13. Tính nhanh :

$$M=\frac{120-\frac{1}{2}.40.5.\frac{1}{5}.20.\frac{1}{4}-20}{1+5+9+...+33+37+41};$$

$$N=10101.\left(\frac{6}{111111}+\frac{6}{222222}-\frac{7}{3.7.11.13.37}\right).$$

14. Chứng tỏ rằng biểu thức :

$$564.\left(\frac{12+\frac{12}{7}-\frac{12}{25}-\frac{12}{71}}{4+\frac{4}{7}-\frac{4}{25}-\frac{4}{71}}:\frac{3+\frac{3}{13}+\frac{3}{19}+\frac{3}{101}}{5+\frac{5}{13}+\frac{5}{19}+\frac{5}{101}}\right).\frac{124242423}{237373735}$$

có giá trị 1476.

15. Mẫu của một phân số lớn hơn tử là 14. Sau khi rút gọn ta được phân số $\frac{993}{1000}$. Tìm phân số khi chưa rút gọn.

16. Hai bà A và B mua hai rổ xoài. Rổ của bà A còn thiếu 4 quả thì bằng $\frac{1}{5}$ số xoài của hai rổ. Rổ của bà B bằng $\frac{1}{2}$ số xoài của hai rổ và thêm 16 quả. Hỏi các rổ xoài của hai bà mua có mấy quả ?

17. Có ba vòi nước cùng chảy vào một cái bể. Nếu mở vòi thứ nhất và vòi thứ hai cùng chảy trong 6 giờ thì đầy $\frac{3}{5}$ bể. Nếu mở vòi thứ hai và thứ ba cùng chảy trong 5 giờ thì đầy $\frac{7}{12}$ bể. Nếu mở vòi thứ nhất và vòi thứ ba cùng chảy trong 9 giờ thì đầy $\frac{3}{4}$ bể. Hỏi nếu mở cả ba vòi cùng chảy vào bể thì sau bao lâu bể sẽ đầy nước ?

18. Tính giá trị của biểu thức : $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}$.

19. Bạn Nguyên đi xe đạp từ A đến B gồm một đoạn lên dốc, một đoạn nằm ngang hết 2 giờ và lúc trở về hết $1\frac{1}{6}$ giờ. Vận tốc khi lên dốc là 8km/h, khi xuống dốc là 18km/h và trên đoạn nằm ngang là 12km/h. Hỏi quãng đường AB dài bao nhiêu kilômét ?

20. Tính giá trị của A biết rằng :

$$A.64.\left(1\frac{1}{2}+0,75\right)=\left(3,75:\frac{1}{4}+2\frac{2}{5}.1,25\right)-\left(\frac{7}{2}.0,8-1,2:\frac{3}{2}\right).$$

21. Tìm giá trị của p để phân số $\frac{3p+24}{p-3}$ bằng một số tự nhiên.

22. Cho các phân số $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{p-2}, \frac{1}{p-1}$. Sau khi quy đồng mẫu và cộng chúng lại, hãy chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 2 thì tử của phân số tổng tìm được chia hết cho p.

23. Tìm bốn số nguyên dương p, q, r, s sao cho :

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1.$$

C. CÁCH GIẢI VÀ LỜI BÌNH

1. Lưu ý rằng $\frac{7}{9}<\frac{8}{9}$, từ đó $\frac{7.2}{9.2}<\frac{8.2}{9.2}, \frac{7.3}{9.3}<\frac{8.3}{9.3}, \ldots, \frac{7.8}{9.8}<\frac{8.8}{9.8}$. Chỉ cần tìm phân số nằm giữa $\frac{7.2}{9.2}=\frac{14}{18}$ và $\frac{8.2}{9.2}=\frac{16}{18}$, đó là phân số $\frac{15}{18}=\frac{5}{6}$ mà mẫu chỉ có 1 chữ số, v.v...

Ta hãy nhân tử và mẫu của $\frac{7}{9}$ và $\frac{8}{9}$:

- với 3 được cặp phân số $\frac{21}{27}$ và $\frac{24}{27}$, cả hai phân số nằm giữa $\frac{22}{24}$ và $\frac{23}{27}$ đều tối giản, nên không thể rút gọn để có phân số mà mẫu chỉ có 1 chữ số;
- với 4 được cặp phân số $\frac{28}{36}$ và $\frac{32}{36}$, từ đó tìm được phân số $\frac{30}{36}=\frac{5}{6}$, (đã xét ở trên);

– với 5 được cặp phân số $\frac{35}{45}$ và $\frac{40}{45}$, từ đó tìm được phân số $\frac{36}{45} = \frac{4}{5}$;

– với 6 được cặp phân số $\frac{42}{54}$ và $\frac{48}{54}$, từ đó tìm được phân số $\frac{45}{54} = \frac{5}{6}$, (đã xét ở trên);

– với 7 được cặp phân số $\frac{49}{63}$ và $\frac{56}{63}$, từ đó tìm được phân số $\frac{54}{63} = \frac{6}{7}$;

– với 8 được cặp phân số $\frac{56}{72}$ và $\frac{64}{72}$, từ đó tìm được các phân số $\frac{60}{72} = \frac{5}{6}$ (đã xét ở trên) và $\frac{63}{72} = \frac{7}{8}$.

Tóm lại tất cả có 4 phân số thỏa mãn đề bài là : $\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}$ và $\frac{7}{8}$.

- ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau :

"Tìm ba phân số theo thứ tự bằng ba phân số $\frac{5}{8}, \frac{11}{20}, \frac{4}{15}$ sao cho hiệu của mẫu và tử của mỗi phân số đều bằng nhau, ngoài ra hiệu đó có giá trị nhỏ nhất".

Ở đây có hai yêu cầu : hiệu bằng nhau, hiệu đó có giá trị nhỏ nhất. Lưu ý là ba phân số đã cho đều tối giản nên các phân số phải tìm đều có dạng : $\frac{a}{b} = \frac{5k}{8k}, \frac{c}{d} = \frac{11m}{20m}, \frac{e}{g} = \frac{4n}{15n}$.

Theo đề bài ta phải có : b – a = d – c = g – e, và các hiệu này phải có giá trị nhỏ nhất.

Như thế : 8k – 5k = 20m – 11m = 15n – 4n,

hay 3k = 9m = 11n = P, với P = BCNN(3, 9, 11) = 99.

Suy ra : k = 33, m = 11, n = 9.

Vậy ba phân số phải tìm là : $\frac{165}{264}, \frac{121}{220}$ và $\frac{36}{135}$.

2. Trước hết ta nhận xét rằng 100 = 99 + 1. Như thế còn thiếu bốn chữ số 9 mà ta có thể thay 1 bằng phân số $\frac{99}{99}$.

Vậy : $100 = 99 + \frac{99}{99} = 99\frac{99}{99}$.

- ***Lời bình :*** Nếu bài ra yêu cầu *"viết số 55 dưới dạng một tổng với năm chữ số 4"* thì viết như thế nào ?

Tương tự như trên, ta nhận xét rằng : 55 = 44 + 11. Như thế còn thiếu

ba chữ số 4 nữa, do đó phải tìm cách viết 11 dưới dạng phân số với ba chữ số 4. Cách viết như sau : $11 = \frac{44}{4}$.

Vậy : $55 = 44 + \frac{44}{4}$.

3. Ta nhận thấy rằng với phân số tối giản $\frac{17}{83}$ thì tổng $17 + 83 = 100$.

Còn với phân số đã cho $\frac{52\,367}{47\,633}$ thì tổng $52\,367 + 47\,633 = 100\,000$. Ta lại biết thêm rằng : Tổng của tử và mẫu của phân số đã cho không thay đổi nếu ta trừ tử đi một số bất kì và cộng số đó vào mẫu.

Ta có : $100\,000 : 100 = 1000$, đây là số mà phân số thu được phải rút gọn cho nó để được dạng tối giản.

$1000.17 = 17\,000$, đây là tử của phân số thu được, do đó :

$n = 52\,367 - 17\,000 = 35\,367$.

Thử lại : $\frac{52\,367 - 35\,367}{47\,633 + 35\,367} = \frac{17\,000}{83\,000} = \frac{17}{83}$.

• ***Lời bình :*** Nếu bây giờ *"cho phân số $\frac{203}{605}$ và yêu cầu tìm số n để phân số $\frac{203 + n}{605 - n}$ sau khi rút gọn sẽ cho phân số tối giản $\frac{3}{5}$"* thì cách giải như thế nào ?

Trước hết ta tính tổng của tử và mẫu của phân số đã cho được :

$203 + 605 = 808$.

Khi cộng vào tử đồng thời trừ đi mẫu một số nào đó thì tổng của tử và mẫu không đổi, mà tổng của tử và mẫu của phân số tối giản $\frac{3}{5}$ là :

$3 + 5 = 8 \neq 808$.

Như vậy ta đã rút gọn phân số cho số $808 : 8 = 101$ để được phân số :

$\frac{3}{5} = \frac{3.101}{5.101} = \frac{303}{505}$.

Suy ra số $n = 100$ (vì $\frac{203 + 100}{605 - 100} = \frac{303}{505}$).

4. Với phân số $\frac{a}{94}$ ta hãy lấy $a = 2$ được phân số $\frac{2}{94}$ không phải là tối giản, nhưng nếu lấy $a = 47$ thì được phân số $\frac{47}{94} = \frac{1}{2}$ lại là tối giản.

Với phân số $\frac{b}{175}$ ta hãy lấy b = 5 thì được phân số $\frac{5}{175} = \frac{1}{35}$ là tối giản, hoặc nếu lấy b = 7 thì được phân số $\frac{7}{175} = \frac{1}{25}$ cũng là tối giản.

- ***Lời bình :*** *Cho phân số $\frac{a}{b}$ tối giản.*

a) Nếu cộng thêm 1 thì có được phân số tối giản không ?

b) Phân số bù với nó để thành 1 có tối giản không ?

Nếu phân số $\frac{a}{b}$ tối giản, tức là ƯCLN(a, b) = 1 thì :

a) Phân số $\frac{a}{b} + 1 = \frac{a+b}{b}$ cũng tối giản, vì ƯCLN(a + b, b) = 1;

b) Phân số $1 - \frac{a}{b} = \frac{b-a}{b}$ cũng tối giản, vì ƯCLN(b − a, b) = 1.

Ví dụ : Với phân số tối giản $\frac{3}{5}$ ta có : phân số $\frac{3}{5} + 1 = \frac{8}{5}$ tối giản và phân số $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ cũng tối giản.

- Có thể chứng minh rằng điều ngược lại không thể xảy ra như sau :

Giả sử $\frac{b-a}{b}$ không tối giản, tức là $\frac{b-a}{b}$ có thể rút gọn cho k > 1, khi đó b − a = km, và b = kn (với m, n tự nhiên và n > m). Suy ra :

$$b - (b - a) = k(n - m), \quad \text{hay} \quad a = k(n - m).$$

Theo trên thì b = kn và a = k(n − m), tức là a và b cùng chia hết cho k > 1, điều này vô lí vì theo đề bài phân số $\frac{a}{b}$ là tối giản, tức là ƯCLN(a, b) = 1. Vậy điều giả sử trên là sai, do đó phân số $\frac{b-a}{b}$ là phân số tối giản.

Ngoài ra, cần lưu ý thêm là : "*Nếu phân số $\frac{a}{b}$ là tối giản thì phân số đảo ngược $\frac{b}{a}$ cũng tối giản*", vì ƯCLN(a, b) đều bằng 1.

5. Vấn đề chỉ là đặt thừa số chung ở tử và mẫu để trong ngoặc được biểu thức giống nhau ở cả tử và mẫu, sau đó rút gọn.

Ta có : $$\frac{1.2.3.(1 + 2.2.2 + 4.4.4 + 7.7.7)}{1.3.5.(1 + 2.2.2 + 4.4.4 + 7.7.7)} = \frac{1.2.3}{1.3.5} = \frac{2}{5}.$$

- **Lời bình :** *Với biểu thức* $\dfrac{1.2 + 2.4 + 3.6 + 4.8 + 5.10 + 6.12}{3.4 + 6.8 + 9.12 + 12.16 + 15.20 + 18.24}$ *thì rút gọn như thế nào ?*

Ta có : $\dfrac{1(2 + 8 + 18 + 32 + 50 + 72)}{6(2 + 8 + 18 + 32 + 50 + 72)} = \dfrac{1}{6}$.

6. Khi chia 1 cho 7 ta được số thập phân vô hạn tuần hoàn với chu kì gồm 6 chữ số là (142857).

Vì 100 = 6.16 + 4 nên chữ số thập phân thứ 100 sau dấu phẩy chính là chữ số thứ tư của chu kì, tức là chữ số 8.

- **Lời bình :** Nếu câu hỏi là : *"Chữ số thập phân thứ 2012 là chữ số nào ? Cũng hỏi như thế với phân số* $\dfrac{18}{7}$*."*

Cách giải sẽ như sau :

Vì 2012 = 6.335 + 2 nên chữ số thập phân thứ 2012 sau dấu phẩy là chữ số thứ hai của chu kì, tức là chữ số 4.

Với phân số $\dfrac{18}{7}$ ta làm phép chia để đổi nó ra số thập phân vô hạn sau :

```
18          | 7
 40         |2,57142857...
  50
   10
    30
     20
      60
       40
        50
```

Kết quả ta được số thập phân vô hạn tuần hoàn với chu kì gồm 6 chữ số là 571428. Theo trên thì chữ số thập phân thứ hai sau dấu phẩy là chữ số thứ hai của chu kì tức là chữ số 7.

7. Trước tiên ta nhận xét rằng :

Nếu $\dfrac{1}{5} < \dfrac{3}{8}$ thì $\dfrac{1}{5} < \dfrac{1+3}{5+8} < \dfrac{3}{8}$ hay $\dfrac{1}{5} < \dfrac{4}{13} < \dfrac{3}{8}$.

Xét $\dfrac{1}{5} < \dfrac{4}{13}$ ta có $\dfrac{1}{5} < \dfrac{1+4}{5+13} < \dfrac{3}{8}$, ta được phân số thứ nhất $\dfrac{5}{18}$;

Lại xét $\dfrac{1}{5} < \dfrac{5}{18}$ ta được phân số thứ hai $\dfrac{1+5}{5+18} = \dfrac{6}{23}$;

Xét tiếp $\dfrac{1}{5} < \dfrac{6}{23}$ ta được phân số thứ ba $\dfrac{1+6}{5+23} = \dfrac{7}{28}$;

Lại xét $\frac{1}{5} < \frac{7}{28}$ ta được phân số thứ tư $\frac{1+7}{5+28} = \frac{8}{33}$;

Xét tiếp $\frac{1}{5} < \frac{8}{33}$ ta được phân số thứ năm $\frac{1+8}{5+33} = \frac{9}{38}$.

• ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán :

"So sánh hai phân số $\frac{368\,972}{764\,797}$ và $\frac{368\,975}{764\,864}$."

Các phân số đã cho khá lớn, nhưng nếu ta đặt a = 368 972 và b = 764 797 thì được phân số thứ nhất $\frac{a}{b}$, còn phân số thứ hai là $\frac{a+3}{b+7}$. Cuối cùng chỉ cần so sánh hai phân số này bằng cách xét hiệu của chúng, tức là xét hiệu $\frac{a}{b} - \frac{a+3}{b+7} = \frac{7a-3b}{b(b+7)}$.

Ta có : $7a > 7.360\,000 = 252.10\,000$, còn $3b < 3.770\,000 = 231.10\,000$.

Như vậy $7a > 3b$, do đó phân số $\frac{a}{b}$ lớn hơn phân số $\frac{a+3}{b+7}$.

8. Ta có : BCNN(35, 28) = 140 và ƯCLN(396, 297) = 99.

Do đó phân số $\frac{140}{99}$ là số nhỏ nhất trong tất cả các số mà khi chia nó cho mỗi phân số $\frac{35}{396}$ và $\frac{28}{297}$ ta được các số tự nhiên.

Thật vậy ta có : $\frac{140}{99} : \frac{35}{396} = 10$ và $\frac{140}{99} : \frac{28}{297} = 15$.

• ***Lời bình :*** Nếu đổi bài ra như sau :

"Cho hai phân số $\frac{8}{15}$ và $\frac{18}{35}$. Tìm số lớn nhất mà khi chia mỗi phân số cho số đó ta được các số tự nhiên." thì cách giải tương tự sau đây :

BCNN(35, 15) = 105;   ƯCLN(8, 18) = 2.

Do đó ta có số lớn nhất là phân số $\frac{2}{105}$ mà khi chia mỗi phân số đó cho nó ta được các số tự nhiên.

Thật vậy : $\frac{8}{15} : \frac{2}{105} = 28$ và $\frac{18}{35} : \frac{2}{105} = 27$.

9. Hiệu hai phân số đã giảm đi $\frac{89}{2} - \frac{143}{14} = \frac{623-143}{14} = \frac{480}{14} = \frac{240}{7}$ khi tăng phân số bé lên 7 lần, tức là $\frac{240}{7}$ bằng 6 lần phân số bé.

Vậy phân số bé là : $\frac{240}{7} : 6 = \frac{40}{7} = 5\frac{5}{7}$.

Phân số lớn là : $\frac{40}{7} + \frac{89}{2} = \frac{80 + 623}{14} = \frac{703}{14} = 50\frac{3}{14}$.

• ***Lời bình :*** Nếu đổi bài ra là :

"Tìm hai phân số biết rằng hiệu của chúng bằng $\frac{7}{10}$ và nếu tăng phân số lớn lên 5 lần thì hiệu bằng $\frac{751}{10}$." thì cách giải sẽ như sau :

Hiệu đã tăng lên : $\frac{751}{10} - \frac{7}{10} = \frac{744}{10}$ khi tăng phân số lớn lên 5 lần, tức là $\frac{744}{10}$ bằng 4 lần số lớn. Do đó phân số lớn là : $\frac{744}{10} : 4 = \frac{186}{10}$

và phân số bé là : $\frac{186}{10} - \frac{7}{10} = \frac{179}{10}$.

10. Do phần thứ năm có 80 quả cam nên phần thứ tư có 80 : 2 = 40 (quả), phần thứ ba có 40 : 2 = 20 (quả), phần thứ hai có 20 : 2 = 10 (quả) và phần thứ nhất có 10 : 2 = 5 (quả).

Tương tự, phần thứ sáu trở đi có 160 quả, 320 quả, 640 quả, 1280 quả, 2560 quả, 5120 quả, v.v...

Riêng phần thứ 11 có 5120 quả lớn hơn số quả 5115 đã cho nên không thể chia thành 11 phần được. Ta thử xem có thể chia thành 10 phần hay không. Ta có :

$$5 + 10 + 20 + 40 + 60 + 80 + 160 + 320 + 640 + 1280 + 2560 = 5115 \text{ (quả)}.$$

Vậy số cam được chia thành 10 phần và phần thứ 10 này có 2560 quả cam.

• ***Lời bình :*** Có thể *giải cách khác như sau :*

Gọi số cam ở phần thứ nhất là c thì ta có tổng :

$$c + 2c + 4c + 8c + 16c + ... = 1023c.$$

Trong tổng này, kể từ số hạng thứ ba đều bằng tổng các số hạng đứng trước nó cộng thêm c, do đó số hạng cuối cùng là $\frac{1023c + c}{2} = 512c$.

Kéo dài dãy số c, 2c, 4c, 8c, 16c, 32c, 64c, 128c, 256c, 512c ta sẽ được 512c là số thứ 10.

Vậy số cam được chia thành 10 phần.

11. MC : 7373, mà 7373 = 73.101. Do nhận xét đó ta có :

$$\frac{4747}{7373} = \frac{47.101}{73.101} = \frac{47}{73}.$$

Tương tự ta có thể viết : $\frac{61}{411} = \frac{61.1001}{411.1001} = \frac{61061}{411411}$.

- ***Lời bình :*** Dựa vào nhận xét trên,

hãy so sánh hai phân số $\frac{31}{77}; \frac{3131}{7777}$ *và hai phân số* $\frac{54}{455}; \frac{54054054}{455455455}$.

Ta có : $\frac{3131}{7777} = \frac{31.101}{77.101} = \frac{31}{77}$; $\frac{54054054}{455455455} = \frac{54.1001001}{455.1001001} = \frac{54}{455}$.

12. a) Ta hãy biểu diễn mỗi phân số thành hiệu hai phân số như sau :

$$\frac{1}{20} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}; \frac{1}{30} = \frac{1}{5} - \frac{1}{6}; \text{ v.v...}$$

Như vậy tổng đã cho có thể viết :

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90} + \frac{1}{110} + \frac{1}{132}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{3-1}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

b) Tương tự như trên ta có :

$$\frac{4}{5.7} + \frac{4}{7.9} + \frac{4}{9.11} + \ldots + \frac{4}{57.59} + \frac{4}{59.61}$$

$$= \frac{2}{5} - \frac{2}{7} + \frac{2}{7} - \frac{2}{9} + \frac{2}{9} - \frac{2}{11} + \ldots + \frac{2}{57} - \frac{2}{59} + \frac{2}{59} - \frac{2}{61}$$

$$= \frac{2}{5} - \frac{2}{61} = \frac{122-10}{305} = \frac{112}{305}.$$

- ***Lời bình :*** Dựa theo cách trên, *hãy tính các tổng sau :*

c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{72} + \frac{1}{90}$;

d) $\frac{1.7.9 + 3.21.27 + 5.35.45 + 7.49.63}{1.3.5 + 1.9.15 + 5.15.25 + 7.21.35}$.

Ta có :

c) Thay $\frac{1}{2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}; \frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$; v.v..., biểu thức đã cho trở thành :

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}.$$

d) $\frac{1.7.9.(1 + 3.3.3 + 5.5.5 + 7.7.7)}{1.3.7.(1 + 3.3.3 + 5.5.5 + 7.7.7)} = \frac{1.7.9}{1.3.7} = 3.$

13. Ta có thể viết :

$$M = \frac{120 - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}\right).(5.20).\left(40.\frac{1}{4}\right) - 20}{1 + 5 + 9 + ... + 33 + 37 + 41} = \frac{120 - 100 - 20}{1 + 5 + 9 + ... + 33 + 37 + 41} = 0;$$

$$N = \frac{10\,101.6}{111\,111} + \frac{10\,101.6}{222\,222} - \frac{10\,101.7}{111\,111}.$$

Quy đồng mẫu : 222 222 được : $\frac{10\,101.12 + 10\,101.6 - 10\,101.14}{222\,222}$

Vậy $N = \frac{10\,101}{222\,222}(12 + 6 - 14) = \frac{10\,101.4}{222\,222} = \frac{4}{22} = \frac{2}{11}$

(vì 222 222 = 22.10 101).

- ***Lời bình :*** Tương tự, "*tính nhanh :*

a) $P = 3\frac{1}{2011}.4\frac{1}{2013} - 1\frac{2010}{2011}.5\frac{2012}{2013} - \frac{5}{2013}$;

b) $Q = 8006.80\,058\,005 - 8005.80\,068\,006.$"

Ta có cách giải sau :

a) Đặt $\frac{1}{2011} = m$, $\frac{1}{2013} = n$ ta có ngay giá trị của P bằng :

$$P = (3 + m)(4 + n) - (2 - m)(6 - n) - 5n = 10m, \text{ tức là } P = \frac{10}{2011}.$$

b) Đặt 8005 = p thì 8006 = p + 1. Biểu thức Q có thể viết gọn như sau :

$$Q = (p + 1).10001p - p.10001(p + 1) = 0.$$

Vậy Q = 0.

14. Trước tiên lưu ý viết mỗi phân số như $\frac{12}{7}$ thành một tích $12.\frac{1}{7}$. Ngoài ra cần rút gọn phân số cuối bằng cách vận dụng tính chất chia hết để viết tử và mẫu thành một tích rồi rút gọn nó :

$$\frac{124\,242\,423}{237\,373\,735} = \frac{3.41\,414\,141}{5.47\,474\,747} = \frac{3.41.1\,010\,101}{5.47.1\,010\,101} = \frac{3.41}{5.47}$$

Với điều lưu ý trên ta làm phép tính như sau :

$$564.\left(\frac{12\left(1 + \frac{1}{7} - \frac{1}{25} - \frac{1}{71}\right)}{4\left(1 + \frac{1}{7} - \frac{1}{25} - \frac{1}{71}\right)} : \frac{3\left(1 + \frac{1}{13} + \frac{1}{19} + \frac{1}{101}\right)}{5\left(1 + \frac{1}{13} + \frac{1}{19} + \frac{1}{101}\right)}\right) \cdot \frac{3.41}{5.47}$$

$$= 564.\left(\frac{12}{4} : \frac{3}{5}\right) \cdot \frac{3.41}{5.47} = 12.47.5.\frac{3.41}{5.47} = 12.3.41 = 1476.$$

• **Lời bình :** Tương tự như trên, ta có bài toán :

"Chứng tỏ biểu thức :

$$158.\left(\frac{12-\frac{12}{7}-\frac{12}{289}-\frac{12}{85}}{4-\frac{4}{7}-\frac{4}{289}-\frac{4}{85}}:\frac{5+\frac{5}{13}+\frac{5}{169}+\frac{5}{91}}{6+\frac{6}{13}+\frac{6}{169}+\frac{6}{91}}\right).\frac{505\,505\,505}{711\,711\,711}$$

có giá trị 404."

Cũng như trên ta tính giá trị phân số $\frac{505\,505\,505}{711\,711\,711}=\frac{505.1\,001\,001}{711.1\,001\,001}=\frac{505}{711}$,

rồi tính giá trị của biểu thức trong ngoặc bằng cách lưu ý đến đặc điểm của tử và mẫu để có thể tính nhanh. Ta có biểu thức trong ngoặc bằng :

$$\frac{12\left(1-\frac{1}{7}-\frac{1}{289}-\frac{1}{85}\right)}{4\left(1-\frac{1}{7}-\frac{1}{289}-\frac{1}{85}\right)}=\frac{12}{4}=3 \quad \text{và} \quad \frac{5\left(1+\frac{1}{13}+\frac{1}{169}+\frac{1}{91}\right)}{6\left(1+\frac{1}{13}+\frac{1}{169}+\frac{1}{91}\right)}=\frac{5}{6},$$

tức là biểu thức trong ngoặc có giá trị là $3:\frac{5}{6}=3.\frac{6}{5}=\frac{18}{5}$.

Vậy biểu thức đã cho bây giờ trở thành :

$$158.\frac{18}{5}.\frac{505}{711}=\frac{79.2.9.2.5.101}{5.9.79}=2.2.101=404.$$

15. Hiệu số phần của mẫu và tử là : $1000-993=7$.

Suy ra tử là : $\frac{14}{7}.993=1986$.

Mẫu là : $\frac{14}{7}.1000=2000$.

Vậy phân số khi chưa rút gọn là : $\frac{1986}{2000}$.

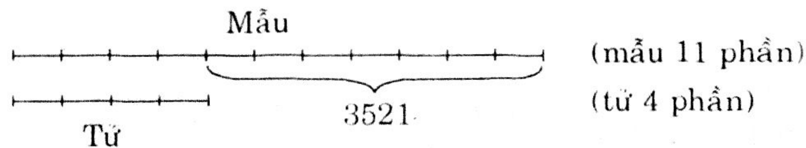
Thử lại : mẫu hơn tử là $2000-1986=14$, sau khi rút gọn cho 2 được phân số $\frac{993}{1000}$).

• **Lời bình :** Sau đây là bài toán tương tự :

"Mẫu của một phân số lớn hơn tử là 3521. Sau khi rút gọn ta được phân số $\frac{4}{11}$. Tìm phân số khi chưa rút gọn".

Ta giải cách khác như sau :

Ta có sơ đồ minh họa bài ra :



Trước khi rút gọn phân số đã cho có dạng $\frac{4k}{11k}$ (k tự nhiên). Vì vậy nếu mẫu được chia thành 11 phần bằng nhau thì tử bằng 4 phần đó, và hiệu giữa mẫu và tử bằng 3521 và bằng (11 – 4) phần đó.

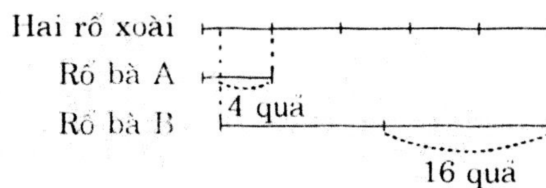
Suy ra tử phải tìm là : $\frac{3521}{11-4}.4 = 503.4 = 2012$.

Mẫu là : 2012 + 3521 = 5533.

Vậy phân số phải tìm là : $\frac{2012}{5533}$.

(Thử lại : mẫu hơn tử là 5533 – 2012 = 3521, phân số rút gọn cho 503 được $\frac{2012}{5533} = \frac{503.4}{503.11} = \frac{4}{11}$).

16. Ta có sơ đồ minh họa bài ra như sau :



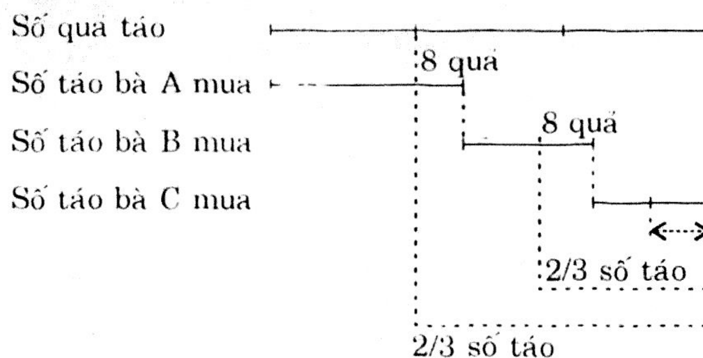
Số xoài ở rổ bà B là : 16 × 2 + 4 = 36 (quả)

Số xoài ở rổ bà A là : (36 – 4) : 4 – 4 = 4 (quả).

• ***Lời bình :*** Tương tự ta giải bài toán sau :

"Ba bà A, B, C chung nhau mua một thúng táo. Bà A mua $\frac{1}{3}$ số táo và 8 quả, bà B mua $\frac{1}{3}$ số táo còn lại và 8 quả bà C mua $\frac{1}{3}$ số táo còn lại lần thứ hai và 8 quả cuối cùng. Hỏi mỗi bà đã mua bao nhiêu quả táo ?"

Ta có sơ đồ minh họa bài toán :



Loại toán này khi giải phải tính ngược từ dưới lên, tức là tính từ số táo mà bà C mua cho đến số táo bà A mua.

Số táo còn lại sau khi bà B mua là : $\frac{8.3}{2} = 12$ (quả)

Số táo có lúc đầu (khi chưa mua bán) là : $\frac{(30+8).3}{2} = 57$ (quả)

Vậy bà A đã mua $57 - 30 = 27$ (quả), bà B đã mua $30 - 12 = 18$ (quả) và bà C đã mua 12 quả.

(Thử lại : bà A đã mua $(57 : 3) + 8 = 19 + 8 = 27$ quả,
bà B đã mua $(57 - 27) : 3 + 8 = 10 + 8 = 18$ quả
và bà C đã mua $[57 - (27 + 18)] : 3 + 8 = 4 + 8 = 12$ quả).

17. Biết vòi I và vòi II cùng chảy trong 6 giờ thì đầy $\frac{3}{5}$ bể thì hãy tìm xem trong 1 giờ hai vòi làm đầy được bao nhiêu phần bể. Tương tự tìm xem trong 1 giờ vòi II và vòi III, vòi I và vòi III làm đầy được bao nhiêu phần bể. Từ đó tính được cả 3 vòi trong 1 giờ làm đầy được mấy phần bể, suy ra thời gian cả 3 vòi cùng chảy làm đầy bể. Do đó ta có cách giải sau :

Trong 1 giờ hai vòi I và II chảy vào được $\frac{3}{5} : 6 = \frac{1}{10}$ (bể);

Trong 1 giờ hai vòi II và III chảy vào được $\frac{7}{12} : 5 = \frac{7}{60}$ (bể);

Trong 1 giờ hai vòi I và III chảy vào được $\frac{3}{4} : 9 = \frac{1}{12}$ (bể).

Trong 2 giờ cả ba vòi chảy vào được :

$$\frac{1}{10} + \frac{7}{60} + \frac{1}{12} = \frac{6+7+5}{60} = \frac{18}{60} = \frac{3}{10} \text{ (bể)}.$$

Trong 1 giờ cả ba vòi chảy vào được : $\frac{3}{10} : 2 = \frac{3}{20}$ (bể).

Thời gian cả ba vòi cùng chảy làm đầy bể trong : $1 : \frac{3}{20} = 6\frac{2}{3}$ (giờ).

• ***Lời bình :***

a) Nếu câu hỏi bây giờ là : *"Nếu vòi thứ ba chảy một mình thì sau bao lâu sẽ đầy bể ?"* thì cách giải như sau :

Trong 1 giờ vòi III chảy vào được $\frac{3}{20} - \frac{1}{10} = \frac{1}{20}$ (bể). Vậy thời gian mà vòi III chảy một mình làm đầy bể trong : $1 : \frac{1}{20} = 20$ (giờ).

b) Một bài toán khác tương tự :

"Ba tổ công nhân cùng rải nhựa một quãng đường. Nếu tổ I và tổ II cùng làm trong 9 giờ thì rải được $\frac{3}{4}$ quãng đường; nếu tổ II và tổ III cùng làm trong 5 giờ thì rải được $\frac{7}{12}$ quãng đường. Nếu tổ III và tổ I cùng làm trong 6 giờ thì rải được $\frac{3}{5}$ quãng đường. Hỏi nếu cả ba tổ cùng làm thì sau mấy giờ sẽ rải nhựa xong quãng đường ?"

Trước hết ta phải tính xem 1 giờ thì tổ I và tổ II, tổ II và tổ III, tổ III và tổ I theo thứ tự rải nhựa được mấy phần quãng đường. Từ đó trong 1 giờ cả ba tổ cùng làm được mấy phần quãng đường để đi tới thời gian cần thiết để cả ba tổ hoàn thành công việc.

Do tổ I và tổ II cùng làm trong 9 giờ thì rải được $\frac{3}{4}$ quãng đường. vậy trong 1 giờ cả hai tổ rải được $\frac{3}{4} : 9 = \frac{1}{12}$ (quãng đường).

Tương tự, trong 1 giờ tổ II và tổ III rải được $\frac{7}{12} : 5 = \frac{7}{60}$ (quãng đường), tổ III và tổ I rải được $\frac{3}{5} : 6 = \frac{1}{10}$ (quãng đường).

Vậy cả ba tổ cùng làm trong 1 giờ sẽ rải được :

$$\left(\frac{1}{12} + \frac{7}{60} + \frac{1}{10}\right) : 2 = \frac{5 + 7 + 6}{60} : 2 = \frac{3}{20} \text{ (quãng đường).}$$

Từ đó suy ra cả ba tổ cùng làm thì sẽ hoàn thành công việc trong thời gian $1 : \frac{3}{20} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$ (giờ) hay 6 giờ 40 phút.

18. Đây là loại toán "bậc thang" mà thực chất là thực hiện các phép cộng và chia phân số.

Biểu thức đã cho lần lượt bằng :

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{3+1}{3}}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{4}{3}}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{3}{4}}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{4+3}{4}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{7}{4}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{4}{7}}$$

$$= 1 + \frac{1}{\frac{7+4}{7}} = 1 + \frac{1}{\frac{11}{7}} = 1 + \frac{7}{11} = \frac{11+7}{11} = \frac{18}{11} = 1\frac{7}{11}.$$

• ***Lời bình :*** Tương tự, *"hãy tính giá trị của biểu thức sau :*

$$2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}}}."$$

Ta lần lượt có :

$$2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{12+1}{4}}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{13}{4}}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{4}{13}}}$$

$$= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{13+4}{13}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{17}{13}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{13}{17}}$$

$$= 2 + \frac{1}{\frac{17+13}{17}} = 2 + \frac{1}{\frac{30}{17}} = 2 + \frac{17}{30} = 2\frac{17}{30}.$$

19. Gọi quãng đường lúc đi lên dốc là AM, lúc về xuống dốc là MA. Ta có hiệu thời gian lên dốc và xuống dốc là : $2 - \frac{11}{6} = \frac{5}{6}$ giờ = 50 phút.

Trên cùng quãng đường AM đó thời gian tỉ nghịch với vận tốc nên :

$$\frac{v_{đi}}{v_{về}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{9}, \quad \text{do đó} \quad \frac{t_{đi}}{t_{về}} = \frac{9}{4}.$$

Suy ra thời gian đi lên dốc là : $50.\frac{9}{5} = 90$ (phút)

Quãng đường AM lên dốc là : $8.\frac{90}{60} = 12$ (km)

Thời gian đi trên đoạn nằm ngang là : 120 – 90 = 30 (phút)

Quãng đường nằm ngang MB là : $12.\frac{30}{60} = 6$ (km)

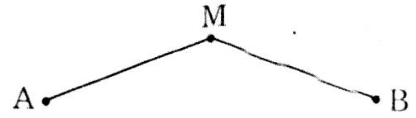
Vậy độ dài quãng đường AB là : 12 + 6 = 18 (km).

• ***Lời bình :*** Nếu đổi bài toán như sau :

"Quãng đường từ A đến B gồm một đoạn lên dốc AM và một đoạn xuống

dốc MB. Thời gian đi từ A đến B hết $1\frac{7}{12}$ giờ và trở về hết $1\frac{3}{4}$ giờ. Biết rằng vận tốc khi lên dốc là 12km/h và khi xuống dốc là 20km/h, tính quãng đường AB." thì cách giải cũng sẽ tương tự.

Thật vậy, cả đi lẫn về quãng đường lên dốc là AM + BM và quãng đường xuống dốc sẽ là MA + MB, hai quãng đường này bằng nhau vì cùng bằng AB.



Do thời gian tỉ lệ nghịch với vận tốc nên : $\frac{t_{\text{lên}}}{t_{\text{xuống}}} = \frac{v_{\text{xuống}}}{v_{\text{lên}}} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$.

Thời gian cả đi lẫn về hết : $1\frac{3}{4} + 1\frac{7}{12} = 3\frac{1}{3}$ (giờ) = 200 phút.

Suy ra thời gian xuống dốc lúc đi và về là : $\frac{200}{8}.3 = 75$ (phút).

Vậy quãng đường xuống dốc, tức là quãng đường AB là : $\frac{20.75}{60} = 25$ (km).

20. Ta tính giá trị của từng vế.

Vế phải : $A.64.\left(1\frac{1}{2} + 0,75\right) = A.64.\left(1\frac{2}{4} + \frac{3}{4}\right) = A.64.\frac{9}{4} = A.144.$

Vế trái : $\left(3,75 : \frac{1}{4} + 2\frac{2}{5}.1,25\right) - \left(\frac{7}{2}.0,8 - 1,2 : \frac{3}{2}\right)$

$= \left(3\frac{3}{4} : \frac{1}{4} + \frac{12}{5}\cdot\frac{5}{4}\right) - \left(\frac{7}{2}\cdot\frac{4}{5} - \frac{12}{10}\cdot\frac{2}{3}\right)$

$= \left(\frac{15}{4}\cdot\frac{4}{1} + 3\right) - \left(\frac{14}{5} - \frac{4}{5}\right) = (15 + 3) - 2 = 16.$

Vậy ta có : A.144 = 16. Từ đó : $A = 16 : 144 = \frac{1}{9}$.

• ***Lời bình :*** Có thể giải thêm bài toán tương tự sau :

"Tính giá trị biểu thức

$$B = \frac{47}{4} : \left[\frac{3,75 : \frac{1}{4} - 6\frac{2}{3}.0,3}{4\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{7} + \frac{4}{5}} - \frac{\left(\frac{3}{20} + 0,5 - \frac{1}{15}\right)2\frac{1}{7}}{1,05 + 0,95}\right]."$$

Cách giải như sau :

Tính giá trị của biểu thức trong [ ] trước, ta có :

$$\frac{3{,}75 : 0{,}25 - \frac{20}{3}\cdot\frac{3}{10}}{\frac{21}{5}\cdot\frac{2}{7}+\frac{4}{5}} - \frac{\frac{9+30-4}{60}\cdot\frac{15}{7}}{2} = \frac{15-2}{2} - \frac{\frac{5}{4}}{2} = \frac{13}{2} - \frac{5}{8} = \frac{47}{8}.$$

Vậy $B = \frac{47}{4} : \frac{47}{8} = \frac{47}{4}\cdot\frac{8}{47}$, tức là $B = 2$.

21. Ta hãy biến đổi phân số đã cho thành một số tự nhiên cộng với một phân số như sau :

$$\frac{3p+24}{p-3} = \frac{(3p-9)+33}{p-3} = \frac{3(p-3)}{p-3} + \frac{33}{p-3} = 3 + \frac{33}{p-3}.$$

Do 3 đã là số tự nhiên nên phân số $\frac{33}{p-3}$ phải là số tự nhiên, như thế $p-3$ phải là ước của 33. Các ước của 33 là 1; 3; 11 và 33.

Ta có : $p - 3 = 1$ khi $p = 4$

$p - 3 = 3$ khi $p = 6$

$p - 3 = 11$ khi $p = 14$

$p - 3 = 33$ khi $p = 36$.

Vậy khi p bằng 4; 6; 14 và 36 ta lần lượt có các số tự nhiên sau :

$$\frac{3.4+24}{4-3} = 36; \quad \frac{3.6+24}{6-3} = \frac{42}{3} = 14;$$

$$\frac{3.14+24}{14-3} = 6; \quad \frac{3.36+24}{36-3} = \frac{132}{33} = 4.$$

(Hoặc thay $p - 3$ vào $3 + \frac{33}{p-3}$ được $3 + 33 = 36$; thay $p - 3 = 3$ được $3 + 11 = 14$; thay $p - 3 = 11$ được $3 + 11 = 14$ và thay $p - 3 = 3$ được $3 + 33 = 36$).

• ***Lời bình :*** Tương tự ta có bài toán sau :

"Tìm t để phân số $T = \frac{8t+49}{4t+3}$ là số tự nhiên."

Ta làm như trên và có : $T = \frac{8t+6+43}{4t+3} = 2 + \frac{43}{4t+3}$.

Muốn T là số tự nhiên thì phân số $\frac{43}{4t+3}$ phải là số tự nhiên, tức là $4t + 3$ phải là ước của 43. Do 43 là số nguyên tố nên nó chỉ có hai ước là 1 và 43.

Với $4t + 3 = 1$ thì $T = 2 + 43 = 45$

Với $4t + 3 = 43$ thì $T = 2 + 1 = 3$.

22. Trước tiên ta thấy rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 2 thì p – 1 là số chẵn. Ta có thể tính tổng các phân số đã cho bằng cách nhóm số hạng đầu với số hạng cuối, số hạng thứ hai với số hạng ngay trước số hạng cuối, v.v...

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{p-2}+\frac{1}{p-1}=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{p-1}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p-2}\right)+...+\left(\frac{1}{\frac{p-1}{2}}+\frac{1}{\frac{p+1}{2}}\right)$$

$$=\frac{p}{1(p-1)}+\frac{p}{2.(p-2)}+...+\frac{p}{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p+1}{2}}$$

Sau khi quy đồng mẫu với mẫu chung là :

$$1.2...\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p+1}{2}...(p-2)(p-1)$$

ta được phân số : $\frac{p.m}{1.2...(p-2).(p-1)}$, trong đó m là số tự nhiên nào đó.

Rõ ràng với mọi cách nhóm ta được phân số tổng hoặc bằng $\frac{pmn}{1.2...(p-2)(p-1)}$ (với n là số tự nhiên) hoặc bằng một phân số sau khi rút gọn cho ước chung của tử và mẫu, và sau khi rút gọn ở tử vẫn còn lại số p. Thật thế, vì p là số nguyên tố nên p nguyên tố cùng nhau với mỗi một trong các số 2, 3, 4, ..., p – 2, p – 1. Mà ở tử còn lại số p nên rõ ràng tử chia hết cho p.

- ***Lời bình :*** Có thể giải bài toán tương tự sau :

"Chứng minh rằng tích các phân số

$$\left(1-\frac{4}{1}\right)\left(1-\frac{4}{9}\right)\left(1-\frac{4}{25}\right)...\left(1-\frac{4}{(2n-1)^2}\right) \text{ bằng } \frac{1+2n}{1-2n}$$

với mọi số tự nhiên $n \neq 0$."

Ta có cách giải sau đây :

Trước hết ta nhận xét là $1-\frac{4}{(2k-1)^2}=\frac{(2k-1)^2-4}{(2k-1)^2}=\frac{(2k-3)(2k+1)}{(2k-1)^2}$.

Lần lượt cho k = 1, 2, 3, ..., n, rồi nhân các kết quả ta được :

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{4}{25}\right)...\left(1-\frac{4}{(2n-1)^2}\right)=\frac{(-1.3)(1.5)(3.7)...(2n-3)(2n+1)}{1.3^2.5^2...(2n-1)^2}$$

$$=\frac{-1.1.3^2.5^2...(2n-3)^2.(2n-1)(2n+1)}{1.3^2.5^2...(2n-1)^2}=\frac{-1(2n+1)}{2n-1}=\frac{1+2n}{1-2n}.$$

23. Giả sử $p \le q \le r \le s$. Thế thì $p \le 4$ là số nhỏ nhất (vì nếu không thì $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} < 1$) và p cũng ≥ 2. Vậy ta phải xét ba trường hợp $p = 2$, $p = 3$, $p = 4$.

Nếu $p = 2$ thì $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{1}{2}$. Ta lại thấy rằng $q \le 6$ (nếu không thì $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} < \frac{1}{2}$) và $q \ge 3$.

Bây giờ trong đẳng thức $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{1}{2}$ ta thay lần lượt $q = 3, 4, 5, 6$.

Xét tiếp r và s theo cách đánh giá p và q ở trên.

Ta lại xét hai trường hợp $p = 3$ và $p = 4$. Cuối cùng sẽ được 14 bộ bốn số (p, q, r, s) phân biệt sau đây :

(2, 3, 7, 42)	(2, 4, 5, 20)		(3, 3, 4, 12)
(2, 3, 8, 24)	(2, 4, 6, 12)		(3, 3, 6, 6)
(2, 3, 9, 18)	(2, 4, 8, 8)	và	(3, 4, 4, 6)
(2, 3, 10, 15)	(2, 5, 5, 10)		(4, 4, 4, 4).
(2, 3, 12, 12)	(2, 6, 6, 6)		

- ***Lời bình :***

a) Bài toán này liên quan đến câu chuyện cổ về *"di chúc chia lạc đà"* sau đây :

"Một ông già có ba người con trai. Khi ông mất đã để lại di chúc về việc chia 17 con lạc đà như sau : chia cho người con thứ nhất $\frac{1}{2}$ số lạc đà, cho người con thứ hai $\frac{1}{3}$ và cho người con thứ ba $\frac{1}{9}$ số lạc đà."

Rõ ràng nếu cứ thực hiện đúng thì người con thứ nhất được $\frac{17}{2} = 8\frac{1}{2}$ (lạc đà), người con thứ hai được $\frac{17}{3} = 5\frac{2}{3}$ (lạc đà) và người con thứ ba được $\frac{17}{9} = 1\frac{8}{9}$ (lạc đà). Làm sao mà chia được 1 con lạc đà thành $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{8}{9}$?

Nếu ta cộng ba phân số $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{17}{18}$ thì thấy ngay nếu có 18 lạc đà thì việc chia sẽ rất dễ dàng, điều đó giải thích tại sao lại mượn thêm 1 con lạc đà của hàng xóm, rồi chia xong lại trả lại con lạc đà đó.

b) Nếu s chia hết cho p, q, r thì bài toán chia lạc đà có thể là trường hợp đặc biệt của đẳng thức sau đây : $\frac{s}{p} + \frac{s}{2} + \frac{s}{r} = s - 1$

(s là số lạc đà 18 con, còn s – 1 là 17 con lạc đà).

Đẳng thức trên lại có thể viết dưới dạng : $\frac{1}{p} + \frac{1}{2} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$.

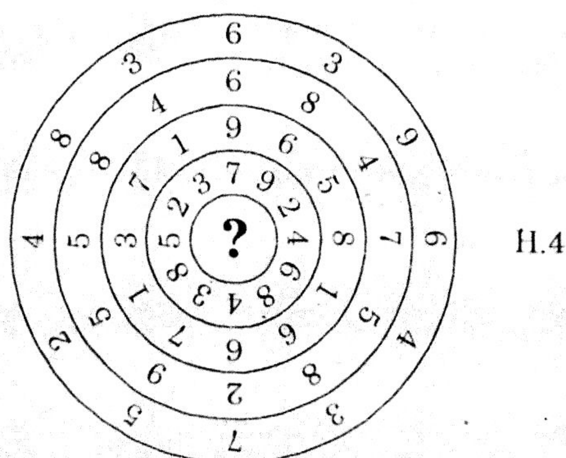
Ở đây s phải chia hết cho p, q, r cho nên so với bài toán đã cho lúc đầu thì chỉ có 12 bộ bốn số (p, q, r, s) phân biệt (chứ không phải 14 bộ), tức là loại đi hai bộ (2, 3, 10, 15) và (3, 4, 4, 6) vì s = 15 không chia hết cho 10 và s = 6 không chia hết cho 4.

Đối với câu chuyện cổ về "di chúc chia lạc đà" thì đó là bộ bốn số (2, 3, 9, 18) mà $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} = 1$.

D. ĐỐ BẠN GIẢI ĐƯỢC

1. *Bốn vòng vành khuyên* (hình 4)

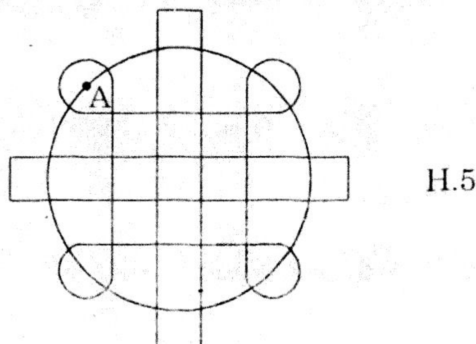
Hãy sắp xếp các số trên mỗi vòng vành khuyên sao cho tổng các số ở mỗi vòng sắp xếp theo 1 bán kính đều bằng nhau và bằng bao nhiêu ? (điền kết quả vào dấu ?)



H.4

2. *Vẽ hình chỉ bằng một nét*

Cho hình 5. Bắt đầu từ A hãy vẽ hình này chỉ bằng một nét.



H.5

§4. TẬP HỢP SỐ NGUYÊN CÓ GÌ LẠ ?

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

1. Tập hợp các số nguyên

a) Các số tự nhiên khác 0 còn được gọi là các số nguyên dương; Các số -1, -2, -3, ... là các số nguyên âm.

Tập hợp gồm các số nguyên âm, số 0 và các số nguyên dương là tập hợp các số nguyên, kí hiệu là **Z**.

b) Mọi số nguyên dương đều lớn hơn số 0;

Mọi số nguyên âm đều nhỏ hơn số 0;

Mọi số nguyên âm đều nhỏ hơn bất kì số nguyên dương nào.

c) Giá trị tuyệt đối : $|0| = 0$; $|7| = 7$; $|-7| = 7$.

Trong hai số nguyên âm, số nào có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn thì lớn hơn. Hai số đối nhau có giá trị tuyệt đối bằng nhau.

2. Các phép tính về số nguyên

a) Cộng hai số nguyên dương chính là cộng hai số tự nhiên khác 0. Muốn cộng hai số nguyên khác dấu, ta tìm hiệu hai giá trị tuyệt đối (số lớn trừ số nhỏ) rồi đặt trước kết quả dấu của số có giá trị tuyệt đối lớn hơn.

b) Muốn trừ số nguyên a cho số nguyên b, ta cộng a với số đối của b.

c) Muốn nhân hai số nguyên khác dấu ta nhân hai giá trị tuyệt đối rồi đặt dấu "–" trước kết quả.

Muốn nhân hai số nguyên âm ta nhân hai giá trị tuyệt đối của chúng.

3. Quy tắc dấu ngoặc và quy tắc chuyển vế

a) Khi bỏ dấu ngoặc có dấu "–" đằng trước, ta phải đổi dấu tất cả các số hạng trong dấu ngoặc.

Khi bỏ dấu ngoặc có dấu "+" đằng trước thì dấu các số hạng trong ngoặc vẫn giữ nguyên.

b) Khi chuyển một số hạng từ vế này sang vế kia của một đẳng thức, ta phải đổi dấu số hạng đó.

B. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

1. Câu nào đúng, câu nào sai ?

a) Mọi số nguyên đều là số tự nhiên.

b) Số tự nhiên là số nguyên dương.

c) Số nguyên không phải là số tự nhiên là số nguyên âm.

d) Nếu p là số tự nhiên và q là số nguyên sao cho $p > q$ thì q là số âm.

e) Nếu $|m| = |n|$ thì $m = n$.

2. Viết : a) Năm số nguyên nhỏ hơn mỗi số sau : -15; $-3,5$; $-\frac{22}{3}$.

b) Năm số nguyên âm lớn hơn mỗi số sau : -7; $-8,55$; $-9\frac{2}{5}$.

3. Viết số liền trước và số liền sau các số đối của 44, 70, -12.

4. Tính tổng các số nguyên p biết :

a) $-8 \le p < 5$ b) $-11 < p \le -7$.

5. Bỏ dấu ngoặc và rút gọn biểu thức : $2a - (-b + c) + a - (-2b - c)$.

Sau đó kiểm tra kết quả với $a = -5$, $b = -1$, $c = 4$.

6. Tính nhanh :

a) $(173 - 914) - (-127 + 86)$

b) $\frac{5}{2012} + \left(-\frac{1}{9}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{3}{5}\right) - \left(\frac{7}{18}\right) - \left(-\frac{2}{7}\right) + \frac{4}{35}$.

7. Chứng tỏ rằng :

a) Tổng của năm số nguyên liên tiếp chia hết cho 5. Cho ví dụ.

b) Tổng của bảy số nguyên liên tiếp chia hết cho 7. Cho ví dụ.

8. Có hay không :

a) Hai số nguyên khác nhau mà số này chia hết cho số kia và ngược lại ?

b) Số nguyên mà bình phương bằng chính nó ?

c) Số nguyên mà lập phương bằng chính nó ?

9. Cho $A = a(b - c) - b(a - c)$ và $B = b(a - c) - a(b + c)$.

Tính tổng $A + B$ và hiệu $A - B$.

10. Cho $M = \frac{(-2) + (-8).(-1).0 + (-4)}{(-1).(-1) + 3}$

và $N = \frac{(-1).(-2) + (-3).(-4) - (-2).(-3)}{(-2).(-3) : (-1) - (-3).(-2) : (-6) + (-2)}$

Tính tổng $M + N$ và hiệu $M - N$.

11. Giải thích tại sao tổng của t số lẻ liên tiếp lại chia hết cho t. Cho ví dụ.

12. Tính nhanh :

a) $(-312)(213 - 70) - 213(70 - 312)$

b) $(0,8.7 + 0,64).\left(1,25.7 - \frac{4}{5}.1,25\right) - (-31,64)$.

13. Số nào nhỏ hơn trong hai số A và B dưới đây và nhỏ hơn bao nhiêu lần ?

$$A = (0{,}8.7 + 0{,}8^2).\left(1{,}25.7 - \frac{4}{5}.1{,}25\right) + 31{,}64$$

$$B = \frac{(11{,}81 + 8{,}19).0{,}02}{9 : 11{,}25}.$$

14. Từ 100 số nguyên tùy ý ta luôn có thể chọn được 15 số mà hiệu của hai số bất kì chia hết cho 7. Điều này đúng hay sai ?

15. Chứng tỏ rằng tồn tại vô số tự nhiên không thể biểu thị dưới dạng tổng các lập phương của ba số nguyên không âm.

16. Chứng tỏ rằng có một số mà bình phương của nó bắt đầu bằng 1983 chữ số 9.

17. Tính tổng $T = -2001 + 2003 - 2005 + 2007 + \ldots - 2105 + 2107$.

C. CÁCH GIẢI VÀ LỜI BÌNH

1. a) Sai, vì có những số nguyên như –1, –2, –3, ... không phải là số tự nhiên.

b) Sai, vì số 0 là số tự nhiên nhưng 0 không phải là số nguyên dương.

c) Đúng, chẳng hạn (–7) là số âm nhưng nó không phải là số tự nhiên mà là số nguyên.

d) Sai, chẳng hạn $p = 4$, $q = 1$ thì $p > q$ nhưng $q = 1$ không phải là số âm.

e) Sai, vì $|5| = |-5|$, nhưng $5 \neq -5$.

- ***Lời bình :*** Cũng hỏi như trên với các câu sau :

a) Mọi số tự nhiên đều là số nguyên.

b) Nếu m là số tự nhiên thì $|m| = m$.

c) Ta luôn có $|p| > 0$.

Trả lời :

a) Đúng, vì tập hợp **Z** các số nguyên bao gồm các số tự nhiên và các số âm như –1, –2, ...

b) Đúng, vì $|8| = 8$.

c) Sai, vì $|p| \geq 0$, mà $|p| = 0$ nếu $p = 0$.

2. a) Năm số nguyên nhỏ hơn (–15) có thể là : –16, –17, –18, –19 và –20 vì các số này đều có giá trị tuyệt đối lớn hơn $|-15| = 15$.

– nhỏ hơn (–3,5) có thể là : –4, –5, –6, –7 và –8.

– nhỏ hơn $-\frac{22}{3}\left(= -7\frac{1}{3}\right)$ có thể là : –8, –9, –10, –11 và –12.

b) Năm số nguyên âm lớn hơn (–7) có thể là : –6, –5, –4, –3 và –2.

– lớn hơn –8,55 có thể là : –8, –7, –6, –5 và –4.

– lớn hơn $-9\frac{2}{5}$ (= –9,4) có thể là : –9, –8, –7, –6 và –5.

• ***Lời bình :***

a) Cần đọc kĩ đề bài để tránh nhầm lẫn khi giải. Chẳng hạn, đối với câu a) nếu đề bài là *"Viết năm số* (không phải là năm số nguyên) *nhỏ hơn (–15)"* thì đáp số có thể là :

–15,1; –15,2; –15,3; –15,4 và –15,5

hoặc là $-16\frac{1}{2}$, $-16\frac{1}{3}$, $-16\frac{1}{4}$, $-16\frac{1}{5}$ và $-16\frac{1}{6}$.

b) Nếu đề bài là : *"Viết tất cả số nguyên nhỏ hơn 0 nhưng lớn hơn –7"* thì đáp số sẽ là : –6, –5, –4, –3, –2, –1.

Nhưng nếu là : "Viết tất cả số nguyên nhỏ hơn 0 nhưng lớn hơn $|-7|$ thì rõ ràng không có số âm nào lại lớn hơn số dương 7.

3. Bài này có hai yêu cầu : viết số đối của 44, 70, –12, sau đó mới viết số liền trước và số liền sau các số đối đó. Vì vậy ta có :

Số đối của 44 là –44, của 70 là –70, của –12 là 12.

Số liền trước –44 là –45, liền sau là –43.

Số liền trước –70 là –71, liền sau là –69.

Số liền trước 12 là 11, liền sau là 13.

• ***Lời bình :*** *"Hãy xét xem số nguyên m như thế nào nếu :*

a) số liền trước m là số nguyên dương.

b) số liền sau m là số nguyên âm.

c) số liền trước m là số nguyên âm còn số liền sau m là số nguyên dương."

Ở đây cần lưu ý : số nguyên b là số liền sau của số nguyên a nếu a < b và không có số nguyên p nào thỏa mãn a < p < b. Khi đó ta cũng nói b là số liền trước a. Chẳng hạn –8 có số liền trước là –9 và số liền sau là –7.

Cách giải sẽ như sau :

a) Nếu số liền trước số nguyên m là số nguyên dương thì m là một số nguyên dương (ví dụ nếu số liền trước m là 11 thì m = 12).

b) Nếu số liền sau số nguyên m là số nguyên âm thì m là một số nguyên âm (ví dụ nếu số liền sau m là –21 thì m = –20).

c) Đó là số 0 vì số liền trước nó là –1 và liền sau nó là 1.

• Hãy nhớ thêm rằng : Số nguyên dương nhỏ nhất là 1, số nguyên âm lớn nhất là −1, nhưng không có số nguyên dương lớn nhất và cũng không có số nguyên âm nhỏ nhất.

4. Trước hết ta phải tìm tất cả giá trị của p thỏa mãn bất đẳng thức, sau đó mới tính tổng tất cả giá trị đó.

a) Với tổng $-8 \le p < 5$, ta có tất cả giá trị của p là :

$$-8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4.$$

. Do các số hạng −4 và 4, −3 và 3, −2 và 2, −1 và 1 là những cặp số đối nhau nên mỗi cặp có tổng bằng 0, do đó tổng phải tìm chỉ còn là : $-(8 + 7 + 6 + 5) = -26$.

b) Với tổng $-11 < p \le -7$, ta có tất cả giá trị của p là : −10, −9, −8, −7.

Tổng phải tìm là : $-(10 + 9 + 8 + 7) = -34$.

• ***Lời bình :*** Nếu bài ra là : *"Tìm tổng các số p biết $-9 < p < 9$"* thì tất cả giá trị của p là :

$$-8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.$$

Ta thấy ngay là tổng này bằng 0, vì các cặp số ±8, ±7, ±6, ±5, ±4, ±3, ±2, ±1 đều có tổng bằng 0.

Nếu bài ra là : *"Tìm tổng các số nguyên có giá trị tuyệt đối bao hàm giữa 13 và 23"*, thì cách giải sẽ như sau :

Các số nguyên có giá trị tuyệt đối bao hàm giữa 13 và 23 là : ±14, ±15, ±16, ±17, ±18, ±19, ±20, ±21, ±22. Tổng của chúng rõ ràng bằng 0.

5. Vận dụng cách bỏ dấu ngoặc có dấu "−" đằng trước ta có :

$$2a + b - c + a + 2b + c = 3a + 3b.$$

Kiểm tra kết quả :

$$\begin{aligned} 2a - (-b + c) + a - (-2b - c) &= 2(-5) - [-(-1) + 4] + (-5) - [-2(-1) - 4] \\ &= -10 - [1 + 4] + (-5) - [2 - 4] \\ &= -10 - 5 - 5 + 2 = -18. \end{aligned}$$

$3a + 3b = 3(-5) + 3(-1) = -15 - 3 = -18.$

Ta thấy hai kết quả bằng nhau.

• ***Lời bình :*** Liên quan đến bỏ dấu ngoặc, hãy *"thực hiện phép tính sau :*

$$(-4) - (-2) - \{(-5) - [(-7) + (-3) - (-8)]\}".$$

Để làm phép tính trong đó có các dấu ( ), [ ] và { } ta bỏ các dấu ( ) trước, rồi đến các dấu [ ] và cuối cùng là dấu { }. Ta có :

$$\begin{aligned} -4 + 2 - \{-5 - [-7 - 3 + 8]\} &= -2 - \{-5 - [-2]\} \\ &= -2 - \{-3\} = -2 + 3 = 1. \end{aligned}$$

6. a) Hiệu đã cho có thể viết :

$$(173 - 914) - (-127 + 86) = 173 - 914 + 127 - 86$$
$$= (173 + 127) - (914 + 86)$$
$$= 200 - 1000 = -800.$$

b) Ta có : $\left[\left(-\frac{1}{9}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{7}{18}\right)\right]+\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{35}+\frac{2}{7}\right)+\frac{5}{2012}$

$$= \frac{-2-9-7}{18}+\frac{21+4+10}{35}+\frac{5}{2012} = -1+1+\frac{5}{2012} = \frac{5}{2012}.$$

7. a) Gọi năm số nguyên liên tiếp là n – 2, n – 1, n, n + 1, n + 2. Tổng của chúng bằng :

(n – 2) + (n – 1) + n + (n + 1) + (n + 2) = 5n, chia hết cho 5.

Ví dụ : (–7) + (–6) + (–5) + (–4) + (–3) = –25, chia hết cho 5.

b) Gọi bảy số nguyên liên tiếp là n – 3, n – 2, n – 1, n, n + 1, n + 2, n + 3. Tổng của chúng bằng :

(n – 3) + (n – 2) + (n – 1) + n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) = 7n,

chia hết cho 7.

Ví dụ : 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28, chia hết cho 7.

• ***Lời bình :*** *Tổng của ba số nguyên liên tiếp, bốn số nguyên liên tiếp, sáu số nguyên liên tiếp, chín số nguyên liên tiếp theo thứ tự có chia hết cho 3, cho 4, cho 6, cho 9 không ?*

Ta có : Tổng của ba số nguyên liên tiếp (n – 1) + n + (n + 1) = 3n, chia hết cho 3. Ví dụ : (–9) + (–8) + (–7) = –24 chia hết cho 3.

Tổng của bốn số nguyên liên tiếp (n – 1) + n + (n + 1) + (n + 2) = 4n + 2 không chia hết cho 4. Ví dụ : 7 + 8 + 9 + 10 = 34 không chia hết cho 4.

Tổng của sáu số nguyên liên tiếp không chia hết cho 6, nhưng tổng của chín số nguyên liên tiếp lại chia hết cho 9, chẳng hạn :

(–9) + (–8) + (–7) + (–6) + (–5) + (–4) + (–3) + (–2) + (–1) = –45, chia hết cho 9.

Như vậy nếu tổng của ba, năm, bảy, chín số nguyên liên tiếp thì lần lượt chia hết cho 3, 5, 7, 9. Nhưng tổng của bốn, sáu, tám số nguyên liên tiếp thì không chia hết cho 4, 6, 8.

8. a) Có. Đó là cặp số nguyên đối nhau và khác 0. Ví dụ : 7 chia hết cho (–7) và (–7) chia hết cho 7.

b) Có. Đó là các số nguyên 0 và 1, vì : $0^2 = 0$, $1^2 = 1$.

c) Có. Đó là các số nguyên 0, 1 và –1, vì : $0^3 = 0$, $1^3 = 1$, $(-1)^3 = -1$.

- ***Lời bình :*** Có hay không (cho ví dụ) :

a) Nếu m chia hết cho p thì m chia hết cho −p ?

b) Nếu m chia hết cho p thì −m chia hết cho p và −p ?

c) Nếu m chia hết cho p thì $|m|$ chia hết cho $|p|$?

Câu trả lời sẽ như sau :

a) Có. Ví dụ nếu m = −48 chia hết cho p = 8 thì :

(−48) chia hết cho (−8).

b) Có. Ví dụ nếu m = 35 chia hết cho p = 5 thì :

(−35) chia hết cho 5 và cho (−5).

c) Có. Ví dụ nếu m = −63 chia hết cho p = 9 thì :

$|-63| = 63$ chia hết cho $|9| = 9$.

9. Áp dụng tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng và phép trừ, ta có :

$$A = a(b - c) - b(a - c) = ab - ac - ba + bc;$$

$$B = b(a - c) - a(b + c) = ba - bc - ab - ac;$$

Vậy $A + B = ab - ac - ba + bc + ba - bc - ab - ac = -2ac;$

$$A - B = ab - ac - ba + bc - (ba - bc - ab - ac)$$

$$= ab - ac - ba + bc - ba + bc + ab + ac = 2bc.$$

- ***Lời bình :*** *"Hãy tính tích A.B"*. Ta có :

$$A = ab - ac - ba + bc = -ac + bc$$

$$B = ba - bc - ab - ac = -bc - ac$$

Vậy tích $A.B = (-ac + bc).(-bc - ac)$

$$= abc^2 + a^2c^2 - b^2c^2 - abc^2$$

$$= a^2c^2 - b^2c^2 = c^2(a^2 - b^2).$$

10. Lưu ý đến thứ tự thực hiện các phép tính : nhân chia trước, cộng trừ sau. Ta có :

$$M = \frac{(-2) + 8.0 - 4}{1 + 3} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2};$$

$$N = \frac{2 + (+12) - (+6)}{6 : (-1) - (+6) : (-6) + (-2)} = \frac{2 + 12 - 6}{-6 - (-1) - 2} = \frac{8}{-7} = -\frac{8}{7}.$$

Vậy $M + N = -\frac{3}{2} + \left(-\frac{8}{7}\right) = -\frac{21}{14} - \frac{16}{14} = \frac{-37}{14};$

$$M - N = -\frac{3}{2} - \left(-\frac{8}{7}\right) = \frac{-21}{14} + \frac{16}{14} = \frac{-5}{14}.$$

• ***Lời bình :*** *"Hãy tính tích M.N và thương M : N. Suy ra M gấp mấy lần N ?"*

Dựa vào kết quả ở trên ta có ngay :

$$M.N = \left(-\frac{3}{2}\right).\left(-\frac{8}{7}\right) = \frac{12}{7} = 1\frac{5}{7}$$

$$M : N = \left(-\frac{3}{2}\right):\left(-\frac{8}{7}\right) = \frac{3}{2}.\frac{7}{8} = \frac{21}{16} = 1\frac{5}{16} \approx 1,3.$$

Vậy M gần gấp 1,3 lần N.

11. Gọi t số nguyên lẻ liên tiếp là : 2m + 1, 2m + 3, 2m + 5, ..., 2m + (2t − 1) với m nguyên. Ta có tổng của chúng bằng :

$$(2m + 1) + (2m + 3) + (2m + 5) + ... + 2m + (2t - 1)$$

$$= 2m.t + [1 + 3 + 5 + ... + (2t - 1)]$$

$$= 2mt + \frac{1 + (2t - 1)}{2}.t = 2mt + t^2 = t(2m + t)$$, chia hết cho t.

Ví dụ : (−9) + (−7) + (−5) + (−3) + (−1) = −25, chia hết cho 5.

• ***Lời bình :*** *"Tổng của p số nguyên chẵn liên tiếp có chia hết cho p không ?"*

Ta hãy xét ví dụ sau :

Tổng của sáu số nguyên chẵn liên tiếp :

(−14) + (−12) + (−10) + (−8) + (−6) + (−4) = −54, chia hết cho 6.

Rõ ràng tổng của p số chẵn liên tiếp :

2m + (2m + 2) + (2m + 4) + ... + (2m + 2p) luôn chia hết cho p

12. Ta có :

a) (−312).213 + 312.70 − 213.70 + 213.312 = 70.(312 − 213)
= 70.99 = 6930.

b) (5,6 + 0,64).[1,25(7 − 0,8)] + 31,64 = 6,24.1,25.6,2 + 31,64
= 6,24.7,75 + 31,64
= 43,36 + 31,64 = 75.

• ***Lời bình :*** Tương tự, *hãy tính* :

$$(9.0,08 + 0,7.0,08).\left(9.12,5 - 0,7.12.\frac{1}{2}\right) - (-9,49).$$

Ta có : [0,08.(9 + 0,7)].[12,5.(9 − 0,7)] + 9,49

= (0,08.9,7.1,25.8,3) + 9,49 = (9,7.8,3) + 9,49 = 80,51 + 9,49 = 90.

13. Ta có : $A = 0{,}8.(7 + 0{,}8).1{,}25.(7 - 0{,}8) + 31{,}64$

$= (0{,}8.7{,}8.1{,}25.6{,}2) + 31{,}64$

$= (7{,}8.6{,}2) + 31{,}64 = 48{,}36 + 31{,}64 = 80.$

$$B = \frac{(11{,}81 + 8{,}19).0{,}02}{9 : 11{,}25} = \frac{20.0{,}02}{0{,}8} = 0{,}5.$$

Vậy A > B đúng 80 : 0,5 = 160 (lần), hay A = 160.B.

- ***Lời bình :*** Tương tự ta có bài toán sau :

"Cho $M = \dfrac{3 : \dfrac{2}{5} - 0{,}09 : (0{,}15 : 2{,}5)}{0{,}32.6 + 0{,}03 - (5{,}3 - 3{,}88) + 0{,}67}$; $N = \dfrac{(1{,}09 - 0{,}29).\dfrac{5}{4}}{\left(18{,}9 - \dfrac{333}{20}\right).\dfrac{8}{9}}$.

Số nào lớn hơn trong hai số M và N và lớn hơn bao nhiêu lần ?".

Cách giải như sau :

$$M = \frac{7{,}5 - 0{,}09 : 0{,}06}{1{,}92 + 0{,}03 - 1{,}42 + 0{,}67} = \frac{7{,}5 - 1{,}5}{1{,}95 - 0{,}75} = \frac{6}{1{,}2} = 5.$$

$$N = \frac{0{,}8.\dfrac{5}{4}}{2{,}1.8 - 14{,}8} = \frac{1}{2}.$$

Vậy M > N đúng $5 : \dfrac{1}{2} = 10$ (lần) hay M = 10.N.

14. Trả lời : đúng.

Hiệu của hai số chia hết cho 7 khi và chỉ khi các số dư của phép chia hai số đó cho 7 bằng nhau. Khi chia một số cho 7 thì số dư có thể là 0, 1, 2, 3, 4, 5 và 6.

Giả sử không thể chọn được 15 số từ 100 số đã cho. Điều này có nghĩa là : không có trên 14 số khi chia cho 7 có số dư là 0, không có trên 14 số khi chia cho 7 có số dư là 1, v.v... Nhưng thế thì tất cả các số có được không quá 14.7 = 98 < 100, do đó điều giả sử không đúng.

- ***Lời bình :*** *"Nếu muốn chọn 16 số thì có được hay không ?"*

Muốn thế, ta hãy lấy một phản ví dụ : xét 100 số tự nhiên từ 1 đến 100. Trong số đó có 14 số : 7, 14, ..., 98 cho số dư là 0; có 15 số cho số dư là 1 và 2; có 14 số cho số dư là 3, 4, 5, 6. Vậy không có 16 số mà hiệu của hai số bất kì chia hết cho 7.

15. Ta chứng tỏ rằng không có số dạng 9n + 4 (n là số tự nhiên) biểu thị được dưới dạng tổng của ba lập phương, vì có vô số các số dạng này.

Thật vậy, mọi số nguyên hoặc có dạng 3k, hoặc 3k + 1, hoặc 3k − 1,

trong đó k là số nguyên. Do đó lập phương của mọi số nguyên có dạng $27k^3$, hoặc : $27k^3 \pm 27k^2 + 9k \pm 1 = 9(3k^3 \pm 3k^2 + k) \pm 1$

tức là hoặc có dạng 9m, hoặc có dạng $9m \pm 1$.

Dùng mọi cách kết hợp có thể được, ta sẽ thấy rằng : tổng các lập phương của ba số nguyên sẽ có một trong các dạng sau : 9n; $9n \pm 1$; $9n \pm 2$; $9n \pm 3$, nhưng không thể bằng số có dạng $9n + 4$.

- ***Lời bình :***

a) *Lưu ý : Mỗi số tự nhiên n có thể phân tích dễ dàng dưới dạng tổng của 5 lập phương.*

Thật thế, hiệu $n - n^3$ chia hết cho 6 với mọi n. Vì thế ta viết được $n = n^3 + 6t$ (t nguyên). Vậy :

$n = n^3 + (t + 1)^3 + (t - 1)^3 + (-t)^3 + (-t)^3$.

b) Có thể giải thêm bài toán sau về lập phương của một số :

"Tìm số nhỏ nhất phải nhân với 2940 để được tích là lập phương của một số nguyên dương."

Trước hết ta nhận xét rằng : khi phân tích lập phương của một số nguyên dương ra thừa số nguyên tố thì số mũ của lũy thừa các thừa số nguyên tố đó chia hết cho 3.

Phân tích số 2940 ra thừa số nguyên tố được : $2940 = 2^2.3.5.7^2$ (*)

Do đó, muốn được số nhỏ nhất là lập phương của một số nguyên dương ta phải nhân $2^2.3.5.7^2$ của (*) với $2.3^2.5^2.7$ tức là nhân với 3150.

Thử lại : $2940.3150 = (2.3.5.7)^3 = 210^3 = 9\,261\,000$.

16. Một trong các số thỏa mãn bài ra là :

N = 999...995 (gồm 1983 chữ số 9).

Thật vậy ta có :

$N^2 = (10^{1984} - 5)^2 = 10^{2.1984} - 10.10^{1984} + 25$

= 99...9900...025 (gồm 1983 chữ số 9 và 1983 chữ số 0).

- ***Lời bình :***

a) *Lưu ý* : Một cách tổng quát, có thể tìm được bất cứ số nào mà 1983 chữ số đầu là 9, còn chữ số thứ 1984 không nhỏ hơn 5.

b) Có thể xét thêm bài toán sau :

"Viết các số nguyên dương từ 1 đến một tỉ. Tổng tất cả các chữ số phải viết bằng bao nhiêu ?"

Để giải bài này ta phải làm như sau :

Trước hết ta tách chữ số 1 ở 1 000 000 000 bằng cách lấy một tỉ trừ đi 1 được số 999 999 999, sau đó nhóm các số thành từng cặp như sau :

(0; 999 999 999); (1; 999 999 998); (2; 999 999 997); ...;

(499 999 998; 500 000 001); (499 999 999; 500 000 000).

Ta sẽ được 500 000 000 cặp số như trên. Tổng các chữ số trong mỗi cặp bằng 9.9 = 81. Kể thêm chữ số 1 lúc đầu ta được tổng phải tìm bằng :

500 000 000.81 + 1 = 40 500 000 001 (bốn mươi tỉ năm trăm triệu lẻ một).

- ***Lời bình :*** Sau đây là bài toán tương tự :

"*Tìm số nguyên p biết rằng :*

$$2110 + 2109 + 2108 + \ldots + p = 21{,}1.100."$$

Vế phải bằng 21,1.100 = 2110, do đó đẳng thức đã cho có thể viết :

$$2109 + 2108 + \ldots + p = 0.$$

Nếu vế trái gồm n số hạng thì ta có : $\dfrac{(2109 + p).n}{2} = 0.$

Do $n \neq 0$ nên suy ra : 2109 + p = 0, từ đó p = –2109.

D. ĐỐ BẠN GIẢI ĐƯỢC

Dùng dấu của bốn phép tính và dấu ngoặc xen giữa các chữ số để được kết quả bằng 2 :

(Ví dụ : với 1234 = 2, ta viết 1.2.3 – 4 = 2).

a) 12345 = 2

b) 123456 = 2

c) 1234567 = 2

d) 12345678 = 2.

§5. XUNG QUANH KHÁI NIỆM HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

1. Đại lượng tỉ lệ thuận và tỉ lệ nghịch

a) Nếu đại lượng y liên hệ với đại lượng x theo công thức $y = kx$ (k là hằng số khác 0) thì ta nói y tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ k.

b) Nếu đại lượng y liên hệ với đại lượng x theo công thức $y = \frac{a}{x}$ hay $xy = a$ (a là hằng số khác 0) thì ta nói y tỉ lệ nghịch với x theo hệ số tỉ lệ a.

2. Hàm số

a) Nếu đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng thay đổi x sao cho với mỗi giá trị của x ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng của y thì y được gọi là hàm số của x và x gọi là biến số.

b) Hệ trục tọa độ Oxy có Ox là trục hoành, Oy là trục tung, giao điểm O của hai trục là gốc tọa độ. Mặt phẳng có hệ tọa độ Oxy gọi là mặt phẳng tọa độ Oxy.

Mỗi điểm M trên mặt phẳng tọa độ xác định một cặp số $(x_0; y_0)$, gọi là tọa độ của điểm M, kí hiệu là $M(x_0; y_0)$, x_0 là hoành độ, y_0 là tung độ.

3. Đồ thị

a) Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các cặp giá trị tương ứng $(x; y)$ trên mặt phẳng tọa độ.

b) Đồ thị của hàm số $y = ax$ $(a \neq 0)$ là một đường thẳng đi qua gốc tọa độ.

B. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

1. Khi đem 100kg thóc xay xát thì thu được 64kg gạo. Nếu đem xay xát 18 thùng thóc, mỗi thùng chứa 20kg thóc, thì sẽ thu được bao nhiêu kg gạo ?

2. Chia số 828 thành ba phần tỉ lệ thuận với $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ và $\frac{3}{4}$.

3. Số học sinh tham gia đồng diễn thể dục ở bốn khối lớp 5, 6, 7, 8 theo tỉ lệ 21, 22, 23, 20. Biết rằng số học sinh ở khối lớp 6 nhiều hơn ở khối lớp 8 là 48 em. Tính số học sinh ở mỗi khối lớp tham gia đồng diễn.

4. Năm đội máy cày gồm 87 máy làm việc trên năm cánh đồng có diện tích bằng nhau. Đội A hoàn thành công việc trong 4 ngày, đội B trong 6 ngày, đội C trong 8 ngày, đội D trong 10 ngày và đội E trong 12 ngày. Biết rằng năng suất của các máy bằng nhau, hỏi mỗi đội có bao nhiêu máy cày ?

5. Chia số 2475 thành ba phần tỉ lệ nghịch với $\frac{1}{22}$, $\frac{1}{33}$ và $\frac{1}{44}$.

6. Một người đi xe máy từ A đến B bắt đầu lúc 7 giờ sáng với vận tốc 50 km/h. Đến B người ấy nghỉ 30 phút rồi trở về A với vận tốc 60 km/h. Trên đường về do xe hỏng nên người ấy phải dừng lại 1 giờ rưỡi, vì thế đã trở về lúc 14 giờ rưỡi. Tính quãng đường AB.

7. Cho ba số (–1,5), 2 và 0.

a) Hãy viết tất cả các cặp số được lập nên từ các số đã cho;

b) Biểu diễn các cặp số đó trên mặt phẳng tọa độ.

8. Tìm nghiệm của phương trình $|x| = p$.

9. a) Biểu diễn các cặp số sau trên mặt phẳng tọa độ :

$$(1; 6), (-1; 4), (-3; -2), (4; -2), (0; 5) \text{ và } (3; 0).$$

b) Nêu nhận xét về tọa độ các điểm nằm trong các góc phần tư I, II, III và IV.

10. Vẽ tam giác ABC có tọa độ các đỉnh là A(–4; 1), B(–4; 4), C(–2; 1) và tính diện tích của nó, biết mỗi khoảng chia trên các trục tọa độ ứng với 1cm.

11. Vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ đồ thị các hàm số :

$$y_1 = \pm\frac{1}{2}x; \quad y_2 = \pm 2x; \quad y_3 = \pm x.$$

Có nhận xét gì về các đồ thị đó ?

12. Cho hàm số $f(t) = \begin{cases} 3 + t & \text{với } t < 0 \\ 3 - t & \text{với } t \geq 0 \end{cases}$

Tìm hàm số f(f(t)) và vẽ đồ thị của nó.

13. Vẽ đồ thị các hàm số sau :

a) $y = [x]$ (hàm số phần nguyên);

b) $y = \text{Sgn}x = \begin{cases} 1 \text{ khi } x > 0 \\ -1 \text{ khi } x < 0 \end{cases}$ (hàm số dấu).

14. Vẽ đường biểu diễn của biểu thức : $|y| = 1 - |x|$.

15. Vẽ đường biểu diễn của biểu thức : $y + |y| = x + |x|$.

C. CÁCH GIẢI VÀ LỜI BÌNH

1. Số thóc đem xay xát và số gạo thu được là hai đại lượng tỉ lệ thuận. Theo tính chất của đại lượng tỉ lệ thuận x, y ta có : $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$, tức là

$\frac{100}{x_2} = \frac{64}{y_2}$ với $x_2 = 18.20 = 360$ (kg) thóc, hay $\frac{100}{360} = \frac{64}{y_2}$.

Từ đó : $y_2 = \frac{360.64}{100} = 230,4$.

Như vậy số gạo thu được là 230,4kg.

• ***Lời bình :*** Tương tự : *"Khi dùng 8 máy cày thì tiêu thụ hết 72 lít xăng, khi dùng 15 máy cày cùng loại thì số xăng tiêu thụ là bao nhiêu ?".*

Số máy cày và số xăng tiêu thụ là hai đại lượng tỉ lệ thuận, do đó ta có tỉ lệ thức (với x là số xăng cần tìm) : $\frac{8}{15} = \frac{72}{x}$.

Từ đó : $x = \frac{15.72}{8} = 15.9 = 135$.

Vậy số xăng tiêu thụ là 135 lít.

* Nếu y tỉ lệ thuận với x theo công thức y = ax mà *hệ số tỉ lệ a là số âm*, chẳng hạn $y = -\frac{1}{2}x$, thì cách phát biểu về hai đại lượng tỉ lệ thuận như thế nào ?

. Với $y = -\frac{1}{2}x$ thì khi x tăng từ 1 đến 4 giá trị của y lại giảm từ $\left(-\frac{1}{2}\right)$ xuống (–2). Trong trường hợp này ta dùng giá trị tuyệt đối để phát biểu : "Nếu hai đại lượng tỉ lệ thuận với nhau thì khi giá trị tuyệt đối của đại lượng này tăng (hoặc giảm) làm cho giá trị tuyệt đối tương ứng của đại lượng kia cũng tăng (hoặc giảm). Vì thế với ví dụ $y = -\frac{1}{2}x$ ở trên thì : khi giá trị tuyệt đối của x tăng từ 1 đến 4 thì giá trị tuyệt đối của y cũng tăng từ $\left|-\frac{1}{2}\right|$ đến $|-2|$, tức là từ $\frac{1}{2}$ đến 2.

2. Gọi ba phần lần lượt là a, b, c. Biết ba phần này tỉ lệ thuận với $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ và $\frac{3}{4}$ hay với $\frac{6}{12}, \frac{8}{12}$ và $\frac{9}{12}$ nên ta có dãy tỉ số bằng nhau :

$$\frac{a}{\frac{6}{12}} = \frac{b}{\frac{8}{12}} = \frac{c}{\frac{9}{12}}.$$

Do a + b + c = 828 và theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có :

$$\frac{a}{\frac{6}{12}} = \frac{b}{\frac{8}{12}} = \frac{c}{\frac{9}{12}} = \frac{a+b+c}{\frac{6+8+9}{12}} = \frac{828}{\frac{23}{12}} = 36.12.$$

Từ đó : $\dfrac{a}{\dfrac{6}{12}} = 36.12$, suy ra $a = 36.12.\dfrac{6}{12} = 216$;

$\dfrac{b}{\dfrac{8}{12}} = 36.12$, suy ra $b = 36.12.\dfrac{6}{12} = 288$;

$\dfrac{c}{\dfrac{9}{12}} = 36.12$, suy ra $c = 36.12.\dfrac{9}{12} = 324$.

Vậy ba phần phải tìm lần lượt là : 216, 288 và 324.

- ***Lời bình :***

a) Nếu đề bài là : *"Tìm bốn số x, y, z, t biết rằng chúng tỉ lệ thuận với 6, 7, 8, 9 và x + t = 75"* thì cách giải như sau :

Ta có : $\dfrac{x}{6} = \dfrac{y}{7} = \dfrac{z}{8} = \dfrac{t}{9} = \dfrac{x+t}{6+9} = \dfrac{75}{15} = 5$.

Từ đó : $x = 6.5 = 30$; $y = 7.5 = 35$;

$z = 8.5 = 40$ và $t = 9.5 = 45$.

b) Nếu đề bài là : *"Chia số 129 thành bốn phần tỉ lệ thuận với 0,5; 0,75; 0,8 và 0,1"* thì cách giải như sau :

$$\frac{a}{0,5} = \frac{b}{0,75} = \frac{c}{0,8} = \frac{d}{0,1} = \frac{a+b+c+d}{0,5+0,75+0,8+0,1} = \frac{129}{2,15} = 60.$$

Từ đó : $a = 60.0,5 = 30$; $b = 0,75.60 = 45$;

$c = 0,8.60 = 48$; $d = 0,1.60 = 6$.

* Ta cũng có thể đổi số thập phân ra phân số :

$$0,5 = \frac{1}{2},\quad 0,75 = \frac{3}{4},\quad 0,8 = \frac{4}{5} \text{ và } 0,1 = \frac{1}{10}.$$

Sau đó quy đồng mẫu được các phân số $\dfrac{10}{20}, \dfrac{15}{20}, \dfrac{16}{20}$ và $\dfrac{2}{20}$, rồi lập dãy tỉ số bằng nhau :

$$\frac{a}{10} = \frac{b}{15} = \frac{c}{16} = \frac{d}{2} = \frac{a+b+c+d}{10+15+16+2} = \frac{129}{43} = 3.$$

Từ đó cũng tìm ra ngay kết quả như ở trên.

3. Gọi x, y, z, t theo thứ tự là số học sinh tham gia đồng diễn của các khối lớp 5, 6, 7, 8. Ta có :

$$\frac{x}{21} = \frac{y}{22} = \frac{z}{23} = \frac{t}{20} = \frac{y-t}{22-20} = \frac{48}{2} = 24.$$

Từ đó : $x = 21.24 = 504$; $y = 22.24 = 528$;

$z = 23.24 = 552$; $t = 20.24 = 480$.

Vậy số học sinh tham gia đồng diễn ở khối lớp 5 là 504 em, ở khối lớp 6 là 528 em, ở khối lớp 7 là 552 em và ở khối lớp 8 là 480 em.

• ***Lời bình :*** Sau đây là một bài toán khác về tỉ lệ thuận.

"Hai người đi xe đạp khởi hành cùng một lúc từ huyện H và huyện K cách nhau 18km để đến huyện M. Vận tốc người đi xe đạp từ H là 10 km/h, của người đi xe đạp từ K là 12 km/h. Biết rằng cả hai cùng đến M một lúc, tính quãng đường mà mỗi người đã đi."

Do bài ra không nói rõ là huyện M nằm giữa hai huyện H và K hay không nằm giữa nên ta xét hai trường hợp.

a) Huyện M nằm giữa hai huyện H và K.

Do thời gian đi bằng nhau nên quãng đường đi và vận tốc là hai đại lượng tỉ lệ thuận, do đó nếu gọi $đ_H$ và $đ_K$ là các quãng đường đi được của hai người thì ta có :

$$\frac{đ_H}{10} = \frac{đ_K}{12} = \frac{đ_H + đ_K}{10 + 12} = \frac{18}{22} = \frac{9}{11}.$$

Vậy $đ_H = 10.\frac{9}{11} = \frac{90}{11} = 8\frac{2}{11}$ (km); $đ_K = 12.\frac{9}{11} = \frac{108}{11} = 9\frac{9}{11}$ (km).

b) Huyện M không nằm giữa H và K.

Ở đây chỉ có thể là H nằm giữa M và K vì cả hai đi trong cùng một thời gian và người đi từ K lại có vận tốc lớn hơn (12 > 10 km/h). Do đó ta có :

$$\frac{đ_K}{12} = \frac{đ_H}{10} = \frac{đ_K - đ_H}{12 - 10} = \frac{18}{2} = 9.$$

Vậy $đ_K = 12.9 = 108$ (km); $đ_H = 10.9 = 90$ (km).

4. Gọi số máy cày của năm đội theo thứ tự là x, y, z, t, u. Vì số máy tỉ lệ nghịch với số ngày hoàn thành công việc nên ta có :

$$4x = 6y = 8z = 10t = 12u,$$

hay : $$\frac{x}{\frac{1}{4}} = \frac{y}{\frac{1}{6}} = \frac{z}{\frac{1}{8}} = \frac{t}{\frac{1}{10}} = \frac{u}{\frac{1}{12}} = \frac{x + y + z + t + u}{\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12}} = \frac{87}{\frac{87}{120}} = 120.$$

Từ đó : $x = \frac{1}{4}.120 = 30$; $y = \frac{1}{6}.120 = 20$; $z = \frac{1}{8}.120 = 15$;

$t = \frac{1}{10}.120 = 12$ và $u = \frac{1}{12}.120 = 10$.

Vậy số máy cày của mỗi đội theo thứ tự là :

Đội A : 30, đội B : 20, đội C : 15, đội D : 12 và đội E : 10.

• ***Lời bình :*** Cách giải ở trên là dựa vào nhận xét sau : "Nếu chia số M thành năm phần tỉ lệ nghịch với các số a, b, c, d, e thì cũng là chia số M thành năm phần tỉ lệ thuận với các số $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}$ và $\frac{1}{e}$."

Tương tự, ta có bài toán về đại lượng tỉ lệ nghịch sau :

"Hai xe ôtô cùng khởi hành từ M đến N. Vận tốc xe thứ nhất là 54 km/h, vận tốc xe thứ hai là 36 km/h. Thời gian xe thứ nhất đi quãng đường MN ít hơn xe thứ hai là 30 phút. Tính thời gian mỗi xe đã đi quãng đường trên và chiều dài quãng đường."

Cách giải như sau :

Gọi thời gian và vận tốc của xe thứ nhất đi trên quãng đường MN là t_1 và v_1, của xe thứ hai đi trên quãng đường này là t_2 và v_2 ($t_1 < t_2$), ta có

$$v_1t_1 = v_2t_2 = s \quad \text{(chiều dài quãng đường MN)}$$

hay $$\frac{t_1}{t_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{36}{54} = \frac{2}{3}.$$

Từ đó $$\frac{t_1}{2} = \frac{t_2}{3} = \frac{t_2 - t_1}{3 - 2} = \frac{0,5}{1} = 0,5 \quad \text{(vì 30 phút = 0,5 giờ)}$$

Vậy $t_1 = 2.0,5 = 1$ (giờ); $t_2 = 3.0,5 = 1,5$ (giờ);

quãng đường MN dài : 54.1 = 54 (km).

5. Chia 2475 tỉ lệ nghịch với $\frac{1}{22}, \frac{1}{33}$ và $\frac{1}{44}$ cũng là chia số đó tỉ lệ thuận với 22, 33 và 44. Ta có :

$$\frac{x}{22} = \frac{y}{33} = \frac{z}{44} = \frac{x + y + z}{22 + 33 + 44} = \frac{2475}{99} = 25.$$

Vậy $x = 22.25 = 550$; $y = 33.25 = 825$ và $z = 44.25 = 1100$.

• ***Lời bình :*** Nếu bài ra là : *"Tìm hai số mà tổng, hiệu và tích của chúng tỉ lệ nghịch với $\frac{1}{5}$, 1 và $\frac{1}{18}$"* thì cách giải như sau :

Gọi hai số đó là a và b. Tổng, hiệu và tích của chúng tỉ lệ nghịch với $\frac{1}{5}$, 1 và $\frac{1}{18}$ tức là tỉ lệ thuận với 5, 1 và 18. Ta có :

$$\frac{a + b}{5} = \frac{a - b}{1} = \frac{ab}{18} = \frac{2a}{6} = \frac{a}{3}.$$

Từ đó : $3ab = 18a$, hay $b = 18a : 3a = 6$.

Thay b = 6 ta có : $\frac{a+6}{5} = \frac{a-6}{1}$ hay a + 6 = 5a − 30, từ đó 4a = 36, a = 9.

Vậy hai số phải tìm là 9 và 6.

6. Thời gian xe máy đi trên quãng đường AB và BA là :

$$14{,}5 - (0{,}5 + 1{,}5 + 7) = 5{,}5 \text{ (giờ)}.$$

Gọi thời gian và vận tốc khi đi từ A đến B là t_1 và v_1, thời gian và vận tốc khi trở về từ B đến A là t_2 và v_2. Do thời gian và vận tốc là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên ta có :

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{60}{50} = \frac{6}{5}, \text{ hay } \frac{t_1}{6} = \frac{t_2}{5}.$$

$$\frac{t_1}{6} = \frac{t_2}{5} = \frac{t_1 + t_2}{6+5} = \frac{5{,}5}{11} = 0{,}5 \text{ (giờ)}.$$

Suy ra : t_1 = 0,5.6 = 3 (giờ), vậy quãng đường AB dài 50.3 = 150 (km).

• ***Lời bình :*** Nếu bài ra là : *"Mẹ chia 63 quả cam cho ba con A, B, C thành ba phần tỉ lệ nghịch với các số 3, 5 và 6. Hỏi mỗi người con được bao nhiêu quả cam ?"* thì ta có cách giải sau :

Gọi ba phần phải tìm theo thứ tự là a, b, c. Chia 63 tỉ lệ nghịch với 3, 5, 6 tức là chia 63 tỉ lệ thuận với $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$. Ta có :

$$\frac{a}{\frac{1}{3}} = \frac{b}{\frac{1}{5}} = \frac{c}{\frac{1}{6}} = \frac{a+b+c}{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}} = \frac{63}{\frac{10+6+5}{30}} = \frac{63}{\frac{21}{30}} = 90.$$

Suy ra : $a = \frac{1}{3}.90 = 30$; $b = \frac{1}{5}.90 = 18$; $c = \frac{1}{6}.90 = 15$.

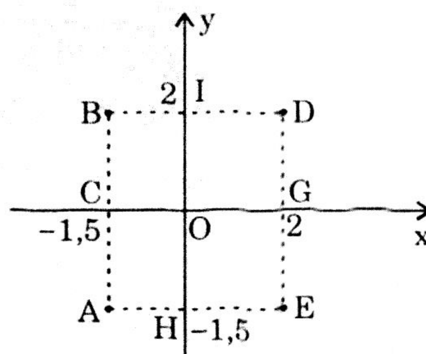
Vậy A được 30 quả, B được 18 quả và C được 15 quả.

7. a) Từ ba số hữu tỉ −1,5; 0; 2 ta lập được tất cả 9 cặp số sau :

(−1,5; −1,5), (−1,5; 2), (−1,5; 0), (2; 2),

(2; −1,5), (2; 0), (0; 0), (0; −1,5) và (0; 2).

b) Các cặp số vừa lập được biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ bởi các điểm A, B, C, D, E, G, O, H, I (hình 6).



H.6

• ***Lời bình :***

a) *"Có nhận xét gì về hai điểm A và D, về hai điểm B và E ?"*

Hai điểm A và D có hoành độ bằng tung độ, chúng cùng nằm trên phân giác của các góc phần tư I và III.

Hai điểm B và E có hoành độ điểm này bằng tung độ điểm kia và tung độ điểm này bằng hoành độ điểm kia, nhưng chúng không trùng nhau.

b) *"Các số p, q phải có điều kiện gì để điểm M(p; q) nằm trong góc phần tư III, nằm trên trục hoành, nằm trên trục tung ?"*

Rõ ràng nếu M nằm trong góc phần tư III thì các số p và q đều phải âm, nằm trên trục hoành thì q = 0 còn p là bất cứ số hữu tỉ nào, nằm trên trục tung thì p = 0 còn q là bất cứ số hữu tỉ nào.

8. Ta phải xét ba trường hợp tùy theo $p > 0$, $p = 0$, $p < 0$.

Nếu $p > 0$ thì phương trình $|x| = p$ có hai nghiệm là hai số đối nhau, ví dụ $|x| = 2$ thì $x = \pm 2$.

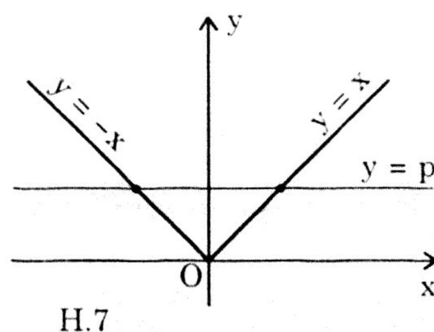
Nếu $p = 0$ thì phương trình có một nghiệm $x = 0$.

Nếu $p < 0$ thì phương trình không có nghiệm (vô nghiệm) vì $|x| \geq 0$.

• ***Lời bình :***

a) Nếu phải *"giải bằng đồ thị phương trình $|x| = p$"* thì cách giải như sau.

Trước hết ta vẽ đồ thị hàm số $y = |x|$ (hình 7) gồm hai tia biểu diễn đồ thị $y = x$ và đồ thị $y = -x$.



H.7

Còn đồ thị hàm số $y = p$ là đường thẳng song song với trục hoành nằm phía trên trục hoành nếu $p > 0$, nằm phía dưới trục hoành nếu $p < 0$, trùng với trục hoành nếu $p = 0$. Do đó :

– Nếu $p > 0$ thì đường thẳng $y = p$ cắt đồ thị $y = |x|$ tại hai điểm (phương trình đã cho có 2 nghiệm là 2 số đối nhau $x = \pm p$).

– Nếu $p = 0$ thì đường thẳng $y = p$ trùng với trục hoành (phương trình có một nghiệm bằng 0).

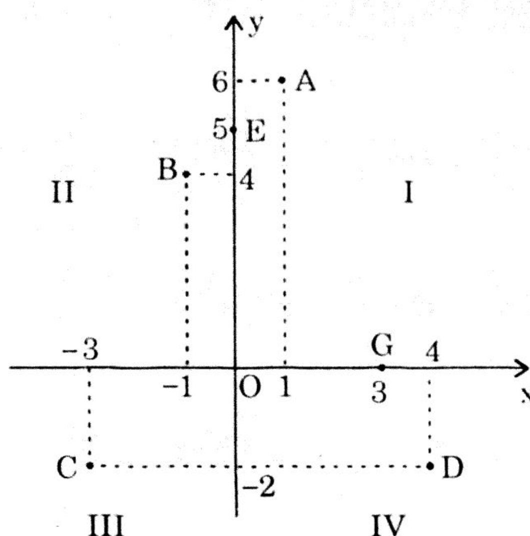
– Nếu $p < 0$ thì đường thẳng $y = p$ không cắt đồ thị $y = |x|$ (phương trình vô nghiệm).

9. a) Các cặp số được biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ như sau (hình 8).

b) Điểm A nằm trong góc phần tư I có tọa độ : $x = 1 > 0$; $y = 6 > 0$.

Điểm B nằm trong góc phần tư II có tọa độ : $x = -1 < 0$; $y = 4 > 0$.

Điểm C nằm trong góc phần tư III có tọa độ : $x = -3 < 0$; $y = -2 < 0$.



H.8

Điểm D nằm trong góc phần tư IV có tọa độ : x = 4 > 0; y = –2 < 0.

Điểm E nằm trên trục tung có tọa độ : x = 0; y = 5 > 0.

Điểm G nằm trên trục hoành có tọa độ : x = 3 > 0; y = 0.

• ***Lời bình :*** Lưu ý thêm :

a) Đường phân giác của các góc phần tư I và III gọi là *phân giác thứ nhất* có phương trình là y = x và hoành độ luôn bằng tung độ, nói cách khác phân giác thứ nhất là tập hợp các điểm có hoành độ bằng tung độ.

Còn *phân giác thứ hai* là phân giác của các góc phần tư II và IV, nó là tập hợp các điểm có hoành độ bằng số đối của tung độ.

b) Trục hoành Ox là tập hợp các điểm có tung độ bằng 0.

Trục tung Oy là tập hợp các điểm có hoành độ bằng 0.

c) Đường thẳng song song với trục hoành và cắt trục tung tại điểm m là tập hợp các điểm có tung độ bằng m.

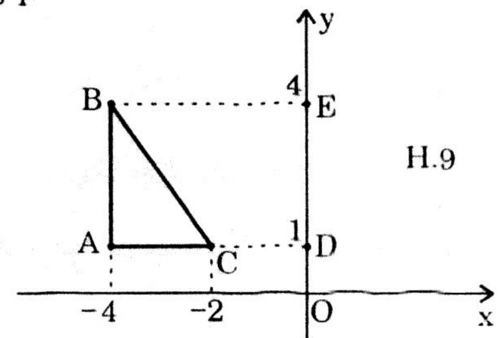
Đường thẳng song song với trục tung và cắt trục hoành tại điểm p là tập hợp các điểm có hoành độ bằng p.

10. Ta có tam giác ABC như ở hình 9.

Đó là một tam giác vuông tại A.

Diện tích tam giác vuông này bằng :

$$\frac{1}{2}AC.AB = \frac{1}{2}.2.3 = 3\ (cm^2).$$



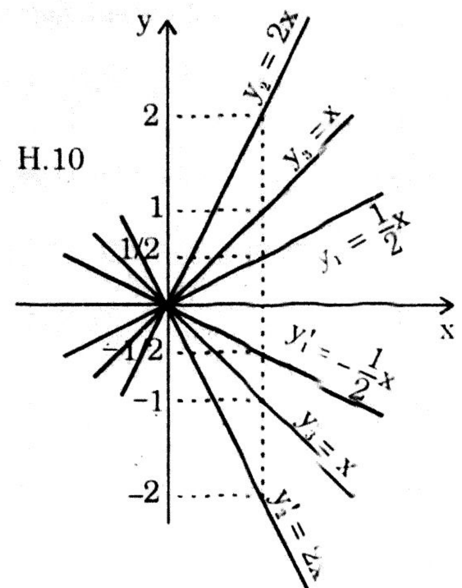
• ***Lời bình :***

Tương tự, *"hãy tính diện tích của tứ giác BCDE với tọa độ các đỉnh là D(0; 1) và E(0; 4)".*

Tứ giác BCDE là hình thang vuông nên diện tích của nó bằng :

$$\frac{CD + BE}{2}.DE = \frac{2+4}{2}.3 = 9\ (cm^2).$$

11. a) Các hàm số đã cho đều có dạng $y = ax$ (với a theo thứ tự bằng $\pm\frac{1}{2}$; ±2 và ±1). Đồ thị của chúng đều đi qua điểm gốc tọa độ O(0; 0), ngoài ra với x = 1 thì $y_1 = \pm\frac{1}{2}$, $y_2 = \pm 2$ và $y_3 = \pm 1$. Ta có đồ thị của chúng như sau (hình 10).

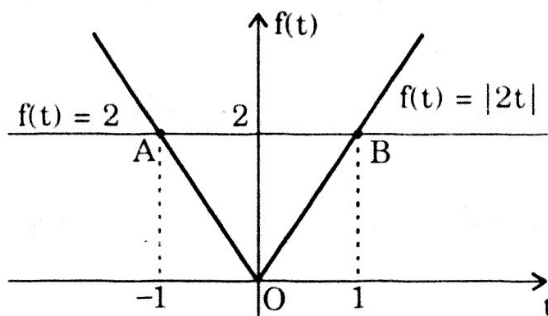


b) Nhận xét :

– Các đường thẳng $y_1 = \frac{1}{2}x$ và $y_1 = -\frac{1}{2}x$; $y_2 = 2x$; $y_2 = -2x$; $y_3 = x$ và $y_3 = -x$ từng đôi đối xứng nhau qua trục hoành Ox.

• ***Lời bình :*** Với bài toán : *"Cho hai hàm số $f(t) = |2t|$ và $f(t) = \pm 2$. Tìm tọa độ giao điểm hai đồ thị rồi căn cứ vào đó để tìm các giá trị của t sao cho $|t| < 2$"*, ta có cách giải sau :

Đồ thị của hai hàm số $f(t) = |2t|$ và $f(t) = 2$ như ở hình 11. Hai đồ thị này cắt nhau tại hai điểm A và B mà tọa độ là A(–1; 2) và B(1; 2).



H.11

Với $f(t) = -2$ thì đồ thị nằm dưới trục hoành Ox nên không cắt đồ thị của $f(t) = |2t|$, do đó không có giao điểm.

Căn cứ vào đồ thị các giá trị cần tìm là hoành độ của các điểm thuộc đồ thị hàm số $f(t) = |2t|$ nằm phía dưới đường thẳng $f(t) = 2$, đó là $-2 < t < 2$.

12. Đặt $f(t) = u$ theo bài ra ta có thể viết $u = 3 - |t|$.

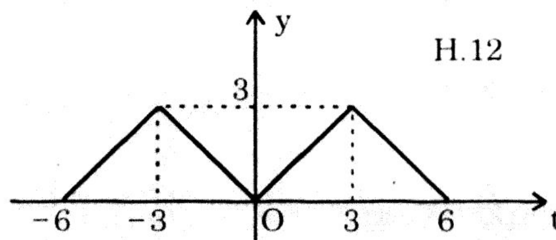
Do đó $y = f(f(t)) = f(u) = 3 - |u|$, hay $y = 3 - \left|3 - |t|\right|$.

Với $t \le -1$ ta có $y = 6 + t$.

Với $-3 \le t \le 0$ ta có $y = -t$.

Với $0 \le t \le 3$ ta có $y = t$.

Với $t \ge 3$ ta có $y = 6 - t$.

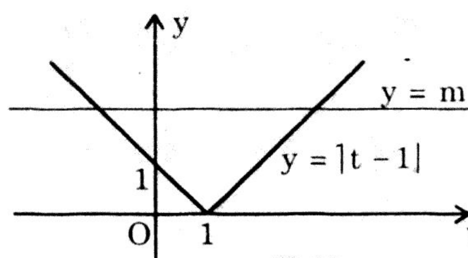


Đồ thị của hàm số đã cho như ở hình 12.

• ***Lời bình :*** Tương tự, nếu phải *"Giải bằng đồ thị phương trình $|t - 1| = m$"* thì cách giải như sau :

Trước tiên ta vẽ đồ thị của hàm số $y = |t - 1|$ gồm hai tia nằm phía trên trục hoành (hình 13) và vẽ đường thẳng y = m song song với trục hoành.

Nếu m > 0 thì đường thẳng cắt đồ thị tại hai điểm (2 nghiệm); nếu m = 0 đường thẳng trùng với trục hoành (1 nghiệm); còn nếu m < 0 thì đường thẳng không cắt đồ thị (vô nghiệm).

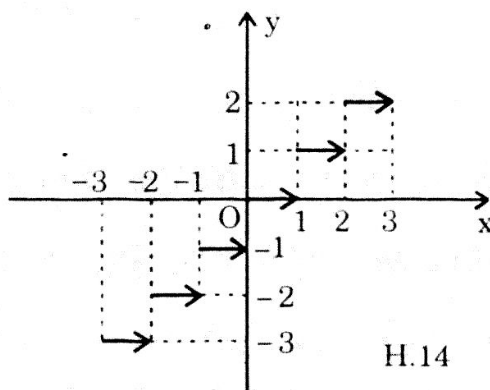


H.13

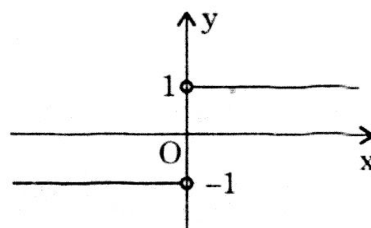
13. a) Ta lập bảng sau đây :

x	–2,4	–2	–1,5	0	0,5	2	2,7
[x]	–3	–2	–1	0	1	2	3

Đồ thị là những điểm nằm trên các đoạn kẻ đậm, trừ những điểm ở đầu mút bên phải của mỗi đoạn (hình 14).



H.14

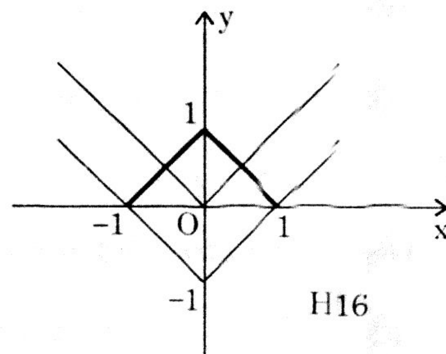


H.15

b) Đồ thị của hàm số y = Sgnx là những điểm nằm trên hai nửa đường thẳng, trừ đầu mút (hình 15).

- **Lời bình :** *Nếu phải vẽ đồ thị hàm số* $y = \left||x| - 1\right|$ thì ta làm như sau :

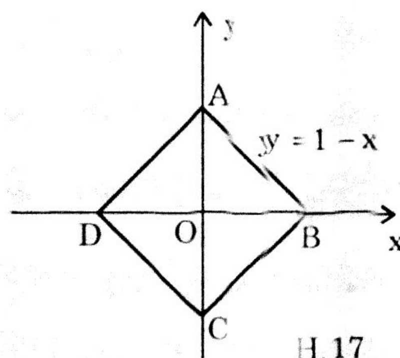
Vẽ theo 3 bước : bước 1 vẽ đồ thị hàm số $y = |x|$; bước 2 tịnh tiến đồ thị dọc theo trục tung Oy một đơn vị về phía dưới trục hoành; bước 3 với phần dưới trục hoành Ox vẽ phần đối xứng với nó qua trục hoành sẽ được đồ thị $y = \left||x| - 1\right|$ (nét đậm) (hình 16).



H16

14. Ta chỉ cần vẽ đường biểu diễn trong góc phần tư I, tức là với $x \geq 0$ và $y \geq 0$. Ở góc phần tư này ta có $|x| = x$, $|y| = y$ nên biểu thức đã cho có dạng $y = 1 - x$.

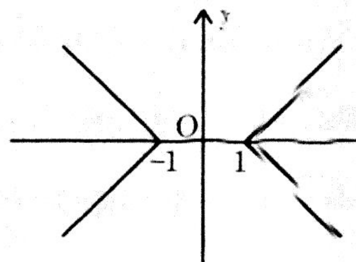
Đường biểu diễn là những điểm thuộc đoạn AB. Suy ra toàn bộ đường biểu diễn là những điểm thuộc bốn cạnh hình vuông ABCD (hình 17).



H.17

- **Lời bình :** Nếu phải *"vẽ đường biểu diễn biểu thức* $|x| - |y| = 1$*"*, thì ta viết biểu thức dưới dạng $|y| = |x| - 1$.

Ta vẽ được đường biểu diễn của nó như hình bên.

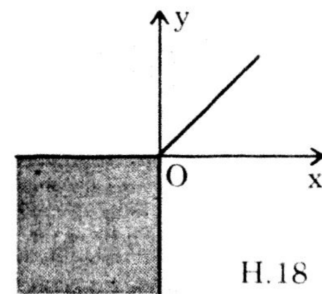


15. Ta phải xét biểu thức trong từng góc phần tư.

Trong góc phần tư I biểu thức có dạng $y = x$, nên đồ thị là tia phân giác của góc đó.

Trong góc phần tư II ta có $|y| = y$, $|x| = -x$ và $y = 0$, nên đồ thị chính là nửa trục hoành.

Trong góc phần tư III ta có y – y = x – x, đây là hằng đẳng thức, điều này có nghĩa là mọi điểm thuộc góc phần tư này đều thỏa mãn hệ thức đã cho.



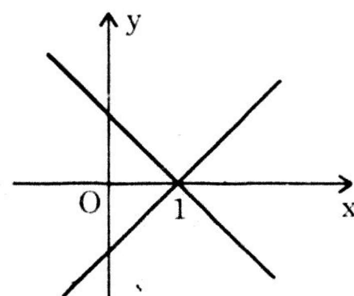
H.18

Trong góc phần tư IV ta có $x = 0$, đồ thị chính là nửa trục tung âm.

Ta được đường biểu diễn như ở bên (hình 18).

- ***Lời bình :***

Nếu là : *"Vẽ đồ thị hàm số* $|y| = |x - 1|$*"* thì trước hết phải vẽ đồ thị hàm số $y = |x - 1|$, sau đó lấy đối xứng qua trục hoành (hình 19) để được hai đường thẳng vuông góc tại điểm (1; 0).

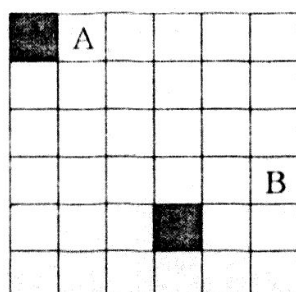


H.19

D. ĐỐ BẠN GIẢI ĐƯỢC

1. *Chỉ qua mỗi ô một lần*

Cho hình vuông gồm 6 × 6 ô trong đó có hai ô đen (hình 20). Hãy vẽ đường đi từ ô A đến ô B qua tất cả các ô (không qua hai ô đen) và chỉ qua mỗi ô một lần.

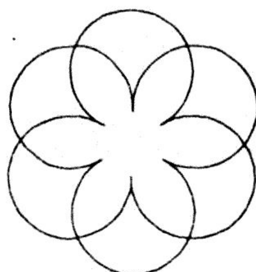


H.20

2. *Bông hoa cánh kép* (hình 21)

Hình bông hoa này gồm ba cánh hoa liền nhau liên tiếp kết hợp với ba cánh hoa liền nhau khác thành bông hoa cánh kép.

Hãy vẽ một nét qua ba cánh hoa đầu tiên và một nét qua ba cánh hoa thứ hai.


H.21

§6. CÁC TẬP HỢP SỐ HỮU TỈ, SỐ VÔ TỈ VÀ SỐ THỰC

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

1. Tập hợp Q các số hữu tỉ

a) Số hữu tỉ là số viết được dưới dạng phân số $\frac{a}{b}$ (với a, b $\in \mathbb{Z}$, b $\neq$ 0).

Tập hợp các số hữu tỉ được kí hiệu là $\mathbb{Q}$.

b) Vì mọi số hữu tỉ đều viết được dưới dạng phân số nên ta có thể cộng, trừ, nhân, chia như đối với phân số.

c) Giá trị tuyệt đối của một số hữu tỉ x :

$$|x| = \begin{cases} x \text{ nếu } x \geq 0 \\ -x \text{ nếu } x < 0 \end{cases}$$

d) Lũy thừa của một số hữu tỉ với số mũ tự nhiên :

– Tích và thương của hai lũy thừa cùng cơ số :

$$x^m.x^n = x^{m+n}; \qquad x^m : x^n = x^{m-n} \qquad (x \neq 0,\ m \geq n)$$

– Lũy thừa của lũy thừa : $(x^m)^n = x^{m.n}$

– Lũy thừa của một tích, của một thương :

$$(x.y)^n = x^n.y^n; \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n} \qquad (y \neq 0)$$

e) Mỗi số hữu tỉ được biểu diễn bởi một số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn và ngược lại.

2. Tỉ lệ thức

a) Tỉ lệ thức là đẳng thức của hai tỉ số $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Nếu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ thì ad = bc.

b) Tính chất của dãy tỉ số bằng nhau :

Từ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ ta suy ra $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a-c+e}{b-d+f}$.

3. Số vô tỉ và số vô thực

a) Số vô tỉ là số được viết dưới dạng số thập phân vô hạn không tuần hoàn.

b) Căn bậc hai của một số a không âm là số x mà $x^2 = a$.

c) Số hữu tỉ và số vô tỉ được gọi chung là số thực. Tập hợp các số thực được kí hiệu là $\mathbb{R}$.

B. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

1. Làm phép tính sau một cách hợp lí :

$$A = \frac{1}{2} - \left(-\frac{16}{17}\right) + \frac{4}{5} - \left(-\frac{4}{9}\right) - \frac{11}{45} + \frac{19}{34} + \frac{17}{105}.$$

2. Tìm các số nguyên a và b sao cho $\frac{a}{8} - \frac{1}{b} = \frac{1}{4}$.

3. Viết tập hợp các số nguyên x sao cho số hữu tỉ $\frac{x+6}{2}$ có giá trị là một số nguyên.

4. Chứng tỏ rằng biểu thức sau có giá trị bằng –41 :

$$\frac{\left(13\frac{1}{4} - 2\frac{5}{27} - 10\frac{5}{6}\right).230\frac{1}{25} + 46\frac{3}{4}}{\left(1\frac{3}{7} + \frac{10}{3}\right) : \left(12\frac{1}{3} - 14\frac{2}{7}\right)}.$$

5. Câu nào đúng, câu nào sai ?

a) Số thực bao gồm số hữu tỉ và số vô tỉ.

b) Số 0 là số hữu tỉ dương.

c) Số thập phân vô hạn không tuần hoàn là một dạng của số vô tỉ.

d) $\sqrt{3}$ và $\sqrt{5}$ đều là số vô tỉ.

e) Mọi số hữu tỉ đều viết được dưới dạng phân số $\frac{a}{b}$ với a, b là những số nguyên.

6. a) Đổi phân số $\frac{37}{99}$ thành số thập phân vô hạn tuần hoàn.

b) Số 0,11(7) có thể đổi thành phân số như sau :

$$0,11(7) = \frac{117 - 11}{900} = \frac{106}{900} = \frac{53}{450}.$$

Dựa theo cách đổi này, hãy đổi –2,15(16) thành phân số.

7. Tính : a) $0,(3) + 3\frac{1}{3} + 0,4(2)$. b) $[0,(5).0,(2)] : \left(3\frac{1}{3} : \frac{33}{25}\right)$.

8. Tính : a) $\frac{(5^4 - 5^3)^3}{125^5}$ b) $\frac{9^3}{(3^4 - 3^3)^2}$.

9. Xếp theo thứ tự tăng dần : $\left(-\frac{1}{4}\right)^3; \frac{1}{2}; \left(\frac{3}{2}\right)^2; \left(-1\frac{1}{3}\right)^3; (-2)^2$.

10. Chứng minh rằng :

a) $4^{100} = 2^{200}$ b) $75^{20} = 4.5^{10}.5^{30}$.

11. So sánh :

a) 3^{21} với 2^{31} b) 2.5^3 với 5.2^3.

12. Cho số dương a, tìm n để : $\frac{1}{2}\left(a^n + \frac{1}{a^n}\right) = 1$.

13. Tìm p để : $3^{|p|} < 27$.

14. Tìm số nguyên n để : $\left(\frac{5}{9}\right)^n = \frac{3125}{59049}$.

15. Tính giá trị của $M = \frac{4^6.9^5 + 6^9.120}{8^4.3^{12} - 6^{11}}$.

16. Cho $A = -\frac{10^{2011} + 1}{10^{2012} + 1}$ và $B = -\frac{10^{2012} + 1}{10^{2013} + 1}$. Chứng minh A < B.

17. Mỗi số tự nhiên $\overline{abc}$ có thể biểu diễn dưới dạng tổng các lũy thừa khác nhau của 2, ví dụ: $231 = 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^2 + 2^1 + 2^0$.

Hỏi những số tự nhiên có ba chữ số $\overline{abc}$ nào có thể biểu diễn như trên với số lớn nhất các số hạng ?

18. Một nhóm học sinh đi cắm trại trong đó số nữ nhỏ hơn 50% nhưng lớn hơn 40%. Hỏi có ít nhất bao nhiêu học sinh đi cắm trại ?

19. Tìm a và b biết rằng :

a) $\frac{a}{9} = \frac{b}{11}$ và $a + b = 60$ b) $\frac{[illegible]}{12} = \frac{[illegible]}{26}$ và $a - b = 7$.

20. Chứng minh rằng từ tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ta suy ra được tỉ lệ thức :

$$\frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2} = \frac{b^2}{d^2}.$$

21. Dựa vào kết quả $0{,}11(7) = \frac{117 - 11}{900} = \frac{106}{900} = \frac{53}{450}$, hãy đổi các số sau thành phân số : 0,18(0); 0,14(9); 0,(37).

22. a) Viết các số hữu tỉ sau dưới dạng số thập phân tuần hoàn :

$$2\frac{24}{33} \text{ và } -1\frac{19}{132}.$$

b) So sánh : 0,(26) và 0,261; –3,776 và –3,(776).

23. Cho ví dụ về :

a) Số hữu tỉ xen giữa $\sqrt{2}$ và $\sqrt{3}$

b) Số vô tỉ xen giữa $\frac{1}{2}$ và $\frac{3}{5}$.

24. Thử lại các đẳng thức sau :

a) $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$ b) $12^8.9^{12} = 18^{16}$

c) $14,2.11 + 14,2.41 + 5,8.11 + 5,8.4 = 1040$.

C. CÁCH GIẢI VÀ LỜI BÌNH

1. Ta có bằng cách thay $-\left(-\frac{a}{b}\right) = +\frac{a}{b}$:

$$A = \frac{1}{2} + \frac{16}{17} + \frac{4}{5} + \frac{4}{9} - \frac{11}{45} + \frac{19}{34} + \frac{17}{105} = \left(\frac{1}{2} + \frac{16}{17} + \frac{19}{34}\right) + \left(\frac{4}{5} + \frac{4}{9} - \frac{11}{45}\right) + \frac{17}{105}$$

$$= \frac{17 + 32 + 19}{34} + \frac{36 + 20 - 11}{45} + \frac{17}{105}$$

$$= \frac{68}{34} + \frac{45}{45} + \frac{17}{105} = 2 + 1 + \frac{17}{105} = 3\frac{17}{105}.$$

• ***Lời bình :*** Tương tự ta có bài toán sau :

"*Tính* $B = \dfrac{\frac{4}{5} + \frac{4}{11} - \frac{4}{9}}{1 + \frac{5}{11} - \frac{5}{9}} - \dfrac{\frac{7}{6} + \frac{7}{10} - \frac{7}{8}}{\frac{5}{6} + \frac{1}{2} - \frac{5}{8}}$."

Ta đặt thừa số chung để dễ rút gọn biểu thức đã cho. Ta có :

$$B = \frac{4\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{11} - \frac{1}{9}\right)}{5\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{11} - \frac{1}{9}\right)} - \frac{7\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{10} - \frac{1}{8}\right)}{5\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{10} - \frac{1}{8}\right)} = \frac{4}{5} - \frac{7}{5} = -\frac{3}{5}.$$

hoặc bài toán sau : "*Tính* $C = \frac{1}{12} + \frac{1}{2015} - \left(-\frac{5}{9}\right) - \frac{7}{45} + \frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{3}{5}$."

Chỉ cần viết thành một tổng đại số rồi vận dụng tính chất giao hoán và kết hợp như câu A để dễ quy đồng mẫu và tính toán được nhanh kết quả.

Ta có :

$$C = \frac{1}{12} + \frac{1}{2015} + \frac{5}{9} - \frac{7}{45} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{3}{5} = \left(\frac{1}{12} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{5}{9} + \frac{3}{5} - \frac{7}{45}\right) + \frac{1}{2015}$$

$$= \frac{1 + 8 + 3}{12} + \frac{25 + 27 - 7}{45} + \frac{1}{2015} = 1 + 1 + \frac{1}{2015} = 2\frac{1}{2015}.$$

2. Trước hết ta cho b phụ thuộc vào a bằng cách biến đổi

$$\frac{1}{b} = \frac{a}{8} - \frac{1}{4} = \frac{a-2}{8},$$

tức là ta có tỉ lệ thức $\frac{1}{b} = \frac{a-2}{8}$ để suy ra 1.8 = b(a – 2). Như vậy b và a – 2 đều là ước của 8.

Mà 8 có các ước là ±1, ±2, ±4, ±8.

Bằng cách lập bảng ta suy ra ngay các số nguyên cần tìm :

b	–1	1	–2	2	–4	4	–8	8
a – 2	–8	8	–4	4	–2	2	–1	1
a	–6	10	–2	6	0	4	1	3

- ***Lời bình :*** Bài ra trên cho biết hiệu $\frac{a}{8} - \frac{1}{b}$ bằng $\frac{1}{4}$, nhưng *nếu cho biết tổng chẳng hạn* $\frac{a}{6} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$ *thì cách giải cũng tương tự.*

Ta có : $\frac{1}{b} = \frac{1}{2} - \frac{a}{6} = \frac{3-a}{6}$, suy ra b(3 – a) = 6. Các ước của 6 là ±1, ±2, ±3, ±6. Ta lập bảng để tìm các giá trị của a và b :

b	–1	1	–2	2	–3	3	–6	6
3 – a	–6	6	–3	3	–2	2	–1	1
a	9	–3	6	0	5	1	4	2

3. Số hữu tỉ $\frac{x+6}{2}$ sẽ là số nguyên khi x + 6 chia hết cho 2. Nhưng 6 chia hết cho 2 nên x + 6 chia hết cho 2 khi x chia hết cho 2, tức à khi x thuộc tập hợp M = {x = 2k | k ∈ Z}.

- ***Lời bình :*** Tập hợp M ở trên là một số nguyên chẵn, nên *có thể viết cách khác như sau* :

$$M = \{0; \pm2; \pm4; \pm6; ...\}$$

Thật vậy với x = 0 thì $\frac{x+6}{2} = 3$, với x = –2 thì $\frac{x+6}{2} = 2$, với x = 2 thì $\frac{x+6}{2} = 4$, với x = –8 thì $\frac{x+6}{2} = -1$, v.v...

4. Biểu thức có dạng $\frac{M}{N}$. Ta tính M như sau :

$$M = \left(13 - 2 - 10 + \frac{1}{4} - \frac{5}{27} - \frac{5}{6}\right).230\frac{1}{25} + 46\frac{3}{4}$$

$$M = \left(1 + \frac{27 - 20 - 90}{108}\right).\frac{5751}{25} + \frac{187}{4} = \frac{639}{12} + \frac{187}{4} = \frac{313}{4} + \frac{187}{4} = 100.$$

Tính tiếp N, ta có :

$$N = \left(1 + \frac{3}{7} + 3 + \frac{1}{3}\right) : \left(12 - 14 + \frac{1}{3} - \frac{2}{7}\right)$$

$$= \left(4 + \frac{16}{21}\right) : \left(-2 + \frac{7-6}{21}\right) = \frac{100}{21} : \left(-\frac{41}{21}\right) = -\frac{100}{41}.$$

Vậy $\frac{M}{N} = \frac{100}{-\frac{100}{41}} = -41.$

• ***Lời bình :*** Tương tự : *"Chứng tỏ biểu thức sau có giá trị bằng* $-\frac{5}{9}$:

$$\frac{P}{Q} = \frac{\left(1\frac{3}{7} - 2\frac{1}{4}\right).3\frac{1}{3}}{\left(2\frac{1}{3} + 3\frac{1}{2}\right) + \left(-4\frac{1}{6} + 3\frac{1}{7}\right) + \frac{5}{42}}."$$

Cách giải như sau :

$$P = \left(\frac{10}{7} - \frac{9}{4}\right).\frac{10}{3} = \left(\frac{40-63}{28}\right).\frac{10}{3} = \left(\frac{-23}{28}\right).\frac{10}{3} = -\left(\frac{23.10}{28.3}\right) = -\frac{115}{42};$$

$$Q = \left(2 + 3 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) + \left(-4 + 3 - \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \frac{5}{42}$$

$$= \left(5 + \frac{3+2}{6}\right) + \left(-1 + \frac{-7+6}{42}\right) + \frac{5}{42}$$

$$= \frac{35}{6} + \left(-\frac{43}{42}\right) + \frac{5}{42} = \frac{245-43}{42} + \frac{5}{42} = \frac{207}{42}.$$

Vậy $\frac{P}{Q} = -\frac{115}{42} : \frac{207}{42} = -\frac{115}{207} = -\frac{5}{9}.$

5. a) Đúng;

b) Sai. Số 0 không là số hữu tỉ dương và cũng không là số hữu tỉ âm;

c) Đúng;

d) Đúng;

e) Sai. Mọi số hữu tỉ đều viết được dưới dạng phân số $\frac{a}{b}$ với a, b $\in \mathbb{Z}$ và b $\neq$ 0.

6. a) Ta làm phép chia sau :

$$\begin{array}{r|l} 370 & 99 \\ \hline -730 & 0,3737... \\ 693 & \\ \hline 370 & \\ -730 & \\ 693 & \\ \hline 370 & \end{array}$$

Vậy $\frac{37}{99} = 0,(37)$;

b) $-2,15(16) = -\frac{21516 - 215}{9900} = -\frac{21301}{9900}$.

• ***Lời bình :*** Lưu ý thêm là ta có thể viết :

$$0 = 0,(0); \quad 2 = 2,(0); \quad -13 = -13,(0).$$

Ngoài ra : $-0,18(0) = -\frac{180 - 18}{900} = \frac{162}{900} = \frac{9}{50}$;

$$0,14(9) = \frac{149 - 14}{900} = \frac{135}{900} = 0,15.$$

7. a) Vì $0,(3) = \frac{3 - 0}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ và $-0,4(2) = -\frac{42 - 4}{90} = -\frac{38}{90} = -\frac{19}{45}$ nên :

$$0,(3) + 3\frac{1}{3} - 0,4(2) = \frac{1}{3} + \frac{10}{3} - \frac{19}{45} = \frac{11}{3} - \frac{49}{45}$$

$$= \frac{165 - 19}{45} = \frac{146}{45} = 3\frac{11}{45}.$$

b) Vì $0,(5) = \frac{5 - 0}{9} = \frac{5}{9}$ và $0,(2) = \frac{2 - 0}{9} = \frac{2}{9}$ nên :

$$[0,(5).0,(2)] : \left(3\frac{1}{3} : \frac{33}{25}\right) = \left(\frac{5}{9}.\frac{2}{9}\right) : \left(\frac{10}{3}.\frac{25}{33}\right) = \frac{10}{81} : \left(\frac{110.25}{33}\right)$$

$$= \frac{10}{81}.\frac{33}{110.25} = \frac{3}{81.25} = \frac{1}{27.25} = \frac{1}{675}.$$

• ***Lời bình :*** Tương tự ta có thể *"tính biểu thức sau :*

$$M = 0,4(3) + 0,6(2).2\frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{0,5(8)} : \frac{50}{53}."$$

Ta có : $0,4(3) = \frac{43 - 4}{90} = \frac{39}{90}$; $\quad 0,6(2) = \frac{62 - 6}{90} = \frac{56}{90}$;

$$0,5(8) = \frac{58 - 5}{90} = \frac{53}{90}.$$

Vậy biểu thức M có giá trị :

$$\frac{39}{90}+\frac{56}{90}.\frac{5}{2}-\frac{\frac{5}{6}}{\frac{53}{90}}.\frac{53}{30}=\frac{13}{30}+\frac{14}{9}-\frac{5}{6}.\frac{90}{53}.\frac{53}{50}=\frac{13}{30}+\frac{14}{9}-\frac{3}{2}$$

$$=\frac{13.9+14.30-3.135}{270}=\frac{402}{270}=\frac{67}{45}=1\frac{22}{45}.$$

8. a) Ta có : $\frac{(5^4-5^3)^3}{125^5}=\frac{\left[5^3(5-1)\right]^3}{(5^3)^5}=\frac{5^9.4^3}{5^{15}}=\frac{4^3}{5^6}=\frac{64}{5^6}.$

b) $\frac{9^3}{(3^4-3^3)^2}=\frac{(3^2)^3}{\left[3^3(3-1)\right]^2}=\frac{3^6}{3^6.2^2}=\frac{1}{4}.$

• ***Lời bình :*** Có thể giải thêm bài toán sau :

"*Tính* $P=\frac{1}{0,25}.\left(1\frac{1}{4}\right)^2+25.\left[\frac{1}{\left(\frac{4}{3}\right)^2}:\left(\frac{5}{4}\right)^3\right]:\frac{1}{\left(-\frac{2}{3}\right)^3}$."

Cách giải như sau : Ta lần lượt có :

$\frac{1}{0,25}=\frac{100}{25}=4;\qquad \left(1\frac{1}{4}\right)^2=\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{25}{16};$

$\frac{1}{\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{1}{\frac{16}{9}}=\frac{9}{16};\qquad \left(\frac{5}{4}\right)^3=\frac{125}{64}$ và $\frac{1}{\left(-\frac{2}{3}\right)^3}=\frac{1}{-\frac{8}{27}}=-\frac{27}{8}.$

Vậy $P=4.\frac{25}{16}+25.\left[\frac{9}{16}:\frac{125}{64}\right]:\left(-\frac{27}{8}\right)$

$$=\frac{25}{4}-25.\frac{9}{16}.\frac{64}{125}.\frac{8}{27}=\frac{25}{4}-\frac{32}{15}=\frac{375-128}{60}=\frac{247}{60}=4\frac{7}{60}.$$

9. Ta lần lượt có : $\left(-\frac{1}{4}\right)^3=-\frac{1}{64};\qquad \left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4};$

$\left(-1\frac{1}{3}\right)^3=\left(-\frac{4}{3}\right)^3=-\frac{64}{27};\qquad (-2)^2=4.$

Vậy $\left(-1\frac{1}{3}\right)^3<\left(-\frac{1}{4}\right)^3<\frac{1}{2}<\left(\frac{3}{2}\right)^2<(-2)^2.$

10. Ta có : a) $4^{100} = (2^2)^{100} = 2^{2.100} = 2^{200}$;

b) $75^{20} = (15.5)^{20} = (3.5^2)^{20} = 3^{20}.5^{10}.5^{30}$

$= 15^{10}.3^{10}.5^{30} = (15.3)^{10}.5^{30} = 45^{10}.5^{30}$.

• ***Lời bình :***

a) Tương tự : *"So sánh 54^4 với 21^{12}."*

Ta có : $54^4 = (2.27)^4 = (2.3^3)^4 = 2^4.3^{12}$

$21^{12} = (3.7)^{12} = 3^{12}.7^{12}$

Do $7^{12} > 2^4$ nên ta suy ra ngay : $21^{12} > 54^4$.

b) Chứng tỏ rằng : $(-1)^{2k} = 1$ còn $(-1)^{2k+1} = -1$ với mọi k tự nhiên.

Ta có : $(-1)^2 = (-1).(-1) = 1$, suy ra $(-1)^{2k} = ((-1)^2)^k = 1^k = 1$

Lại có $(-1)^{2k+1} = (-1)^{2k}.(-1) = 1.(-1) = -1$.

11. a) Ta có : $3^{21} = 3^{20}.3 = (3^2)^{10}.3 = 9^{10}.3$

$2^{31} = 2^{30}.2 = (2^3)^{10}.2 = 8^{10}.2$

Do $9^{10} > 8^{10}$ nên $3.9^{10} > 3.8^{10} > 2.8^{10}$, vậy :

$3^{21} = 3.9^{10} > 2.8^{10} = 2^{31}$, tức là $3^{21} > 2^{31}$.

b) Ta có : $2.5^3 = 2.5^2.5 = 50.5$

$5.2^3 = 5.8$

Vậy $50.5 > 5.8$, tức là $2.5^3 > 5.2^3$.

• ***Lời bình :***

a) Tương tự : *"Hãy so sánh hai số 100^{20} và 9898^{10}."*

Ta thấy ngay rằng $9898^{10} < 10000^{10}$, mà $10000^{10} = (100^2)^{10} = 100^{20}$.

Vậy $100^{20} > 9898^{10}$.

b) *So sánh bốn cách viết với ba chữ số sau đây : 222, 22^2, 2^{22}, 2^{2^2}.*

Ta có : $2^{2^2} = 2^4 = 16$; $22^2 = 484$; $2^{22} > 2^9 = 512$.

Vậy : $2^{22} > 22^2 > 222 > 2^{2^2}$.

12. Vì a^n dương với mọi n nên nhân hai vế của đẳng thức đã cho $\frac{1}{2}\left(a^n + \frac{1}{a^n}\right) = 1$ với a^n ta được đẳng thức tương đương $a^{2n} - 2a^n + 1 = 0$, hay $(a^n - 1)^2 = 0$. Suy ra $a^n = 1$, tức là n = 0.

• ***Lời bình :*** Có thể giải các bài toán tương tự :

a) *"Tìm số tự nhiên n sao cho $25 \le 5^n \le 125$."*

Cách giải như sau :

Ta có $25 = 5^2$ và $125 = 5^3$, do đó $5^2 \le 5^n \le 5^3$.

Suy ra : $5^n = 5^3$, vậy n = 3, hoặc $5^n = 5^2$ vậy n = 2.

Nếu n = 3 thì $5^3 = 5^n > 5^2$, còn nếu n = 2 thì $5^3 > 5^n = 5^2$.

Vậy n = {2; 3}.

b) *"Tìm tất cả các số nguyên n sao cho $\frac{1}{9}.27^n = 3^n$."*

Ta có cách giải sau :

$\frac{1}{9}.27^n = \frac{1}{3^2}.(3^3)^n = \frac{3^{3n}}{3^2} = 3^{3n-2}$. Biểu thức này bằng 3^n nên ta có :

$3^{3n-2} = 3^n$, suy ra 3n – 2 = n, từ đó n = 1.

13. Do $27 = 3^3$ nên từ bất phương trình đã cho suy ra : $|p| < 3$. Từ đó ta có : $p \in \{-3; 3\}$.

- ***Lời bình :*** Tương tự, ta có thể *"Tìm giá trị của p sao cho $63 \le 2^p \le 128$"*.

 Cách giải như sau :

 Ta có $64 = 2^6$; $128 = 2^7$. Từ đó ta có ngay các giá trị của p là 6 và 7.

- Nhưng nếu phải tìm p sao cho $16 < \left(\frac{1}{2}\right)^p < 32$ thì do $16 = 2^4$, $32 = 2^5$ nên không tồn tại giá trị nào của p thỏa mãn bất đẳng thức kép đã cho.

14. Ta có : $3125 = 5^5$ và $59\,049 = 9^5$, do đó : $\left(\frac{5}{9}\right)^n = \frac{5^5}{9^5} = \left(\frac{5}{9}\right)^5$, suy ra n = 5.

- ***Lời bình :*** Tương tự ta có thể *"Tìm n sao cho $(0,25)^n = \frac{1}{256}$."*

 Ta có $0,25 = \frac{1}{4}$ nên $(0,25)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$ và $256 = 4^4$ nên $\frac{1}{256} = \frac{1}{4^4} = \left(\frac{1}{4}\right)^4$.

 Vậy : $\left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^4$, từ đó n = 4.

15. Ta hãy biến đổi biểu thức đã cho thành lũy thừa của 2 và 3 như sau :

$$M = \frac{(2^2)^6.(3^2)^5 + (2.3)^9.(8.3.5)}{(2^3)^4.3^{12} - (3.2)^{11}} = \frac{2^{12}.3^{10} + 2^9.3^9.2^3.3.5}{2^{12}.3^{12} - 3^{11}.2^{11}}$$

$$= \frac{2^{12}.3^{10} + 2^{12}.3^{10}.5}{3^{11}.2^{11}(1.3-1)} = \frac{2^{12}.3^{10}(1+5)}{3^{11}.2^{11}.5} = \frac{2.6}{3.5} = \frac{4}{5} \ (= 0,8).$$

- ***Lời bình :*** Ta giải thêm bài toán sau :

 "Chứng minh biểu thức $8^{10} - 8^9 - 8^8$ chia hết cho 55 và biểu thức $10^9 + 10^8 + 10^7$ chia hết cho 111."

Cách giải như sau :

$8^{10} - 8^{9} - 8^{8} = 8^{8}(8^{2} - 8 - 1) = 8^{8}.55$, chia hết cho 55.

$10^{9} + 10^{8} + 10^{7} = 10^{7}(10^{2} + 10 + 1) = 10^{7}.111$, chia hết cho 111

16. Trước hết ta so sánh 10.A với 10.B, từ đó suy ra A < B. Ta có :

$$10.A = \frac{-10(10^{2011}+1)}{10^{2012}+1} = \frac{-(10^{2011}.10+10)}{10^{2012}+1}$$

$$= \frac{-(10^{2012}+10)}{10^{2012}+1} = \frac{-(10^{2012}+1)}{10^{2012}+1} - \frac{9}{10^{2012}+1} = -1 - \frac{9}{10^{2012}+1}.$$

Tương tự : $10.B = -1 - \dfrac{9}{10^{2013}+1}$.

Do $10^{2013} + 1 > 10^{2012} + 1$, nên $\dfrac{-9}{10^{2013}+1} > \dfrac{-9}{2^{2012}+1}$.

Do đó 10.A < 10.B, tức là A < B.

• ***Lời bình :*** Tương tự :

"Cho $C = \dfrac{1+13+13^{2}+...+13^{13}}{1+13+13^{2}+...+13^{12}}$ *và* $D = \dfrac{1+11+11^{2}+...+11^{13}}{1+11+11^{2}+...+11^{12}}$.

Chứng minh rằng C > D."

Cách giải như sau :

$$C = \frac{(1+13+13^{2}+...+13^{12})+13^{13}}{1+13+13^{2}+...+13^{12}} = 1 + \frac{13^{13}}{1+13+13^{2}+...+13^{12}}$$

$$= 1 + 1 : \frac{1+13+13^{2}+...+13^{12}}{13^{13}} = 1 + 1 : \left(\frac{1}{13^{13}} + \frac{1}{13^{12}} + ... + \frac{1}{13}\right);$$

$$D = \frac{(1+11+11^{2}+...+11^{12})+11^{13}}{1+11+11^{2}+...+11^{12}} = 1 + \frac{11^{13}}{1+11+11^{2}+...+11^{12}}$$

$$= 1 + 1 : \frac{1+11+11^{2}+...+11^{12}}{11^{13}} = 1 + 1 : \left(\frac{1}{11^{13}} + \frac{1}{11^{12}} + ... + \frac{1}{11}\right).$$

Vì $\dfrac{1}{13^{13}} < \dfrac{1}{11^{13}}, \dfrac{1}{13^{12}} < \dfrac{1}{11^{12}}, ..., \dfrac{1}{13} < \dfrac{1}{11}$ nên C > D.

17. Ta biết rằng tổng : $2^{9} + 2^{8} + ... + 2^{1} + 2^{0} = 1023$ (*) nên một số có ba chữ số $\overline{abc}$ biểu diễn được dưới dạng tổng các lũy thừa khác nhau của số 2 không thể có quá 9 số hạng.

Do đó để tìm số có ba chữ số chứa 9 số hạng có thể dựa vào (*) ở trên, bằng cách bỏ đi bất cứ số hạng nào lớn hơn 23, tức là từ số 1023 ta trừ bớt đi 32; 128; 256 và 512.

Vậy các số có ba chữ số thỏa mãn bài ra là : 991; 959, 895, 767 và 511.

• ***Lời bình :*** Ta xét thêm bài toán sau về tìm số có ba chữ số :

"Tìm tất cả những số có ba chữ số, sao cho khi xóa bất cứ chữ số nào thì số có ba chữ số đó chia hết cho số còn lại có hai chữ số."

Giả sử $\overline{abc}$ là một trong các số thỏa mãn bài ra. Vì $\overline{abc} = 10.\overline{ab} + c$ nên c = 0. Thế thì theo giả thiết 100a + 10b chia hết cho 10a và cho 10b, tức là 10a + b chia hết cho a và cho b.

Điều kiện thứ nhất được thỏa mãn nếu b chia hết cho a, tức là b = k.a, thế thì từ điều kiện thứ hai suy ra 10a chia hết cho ka, tức là chia hết cho k. Vì $b \neq a$ nên k = 2 hoặc 5.

Với k = 2 ta được bốn số : 120; 240; 360 và 480.

Với k = 5 ta được một số là 150.

Vậy cả thảy có 5 số thỏa mãn bài ra.

18. Giả sử một nhóm học sinh gồm n người trong đó có m nữ. Ta phải tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho tồn tại số tự nhiên m thỏa mãn bất đẳng thức : $\frac{2}{5} < \frac{m}{n} < \frac{1}{2}$.

Cho n các giá trị từ 2 đến 7 ta thấy rằng bất đẳng thức trên chỉ thỏa mãn với phân số $\frac{m}{n} = \frac{3}{7}$. Vậy 7 là giá trị nhỏ nhất của n cần tìm, tức là nhóm học sinh đó ít nhất phải có 7 người.

• ***Lời bình :***

a) Lưu ý rằng : phân số $\frac{3}{7}$ có được từ các phân số $\frac{2}{5}$ và 1 bằng cách cộng tử 2 + 1 = 3 và cộng mẫu 5 + 2 = 7.

b) Với bài ra ở trên nếu có thêm câu hỏi :

"Có ít nhất bao nhiêu học sinh đi cắm trại nếu số nữ nhỏ hơn 44% nhưng lớn hơn 43% ?" thì cách giải lại như sau :

Ta phải tìm giá trị $\frac{m}{n}$ sao cho $\frac{43}{100} < \frac{m}{n} < \frac{44}{100} = \frac{11}{25}$ (1)

với n là số tự nhiên nhỏ nhất. (1) có thể viết :

$$2\frac{14}{43} > \frac{n}{m} > 2\frac{3}{11}, \qquad \text{hay} \quad \frac{14}{43} > \frac{n-2m}{m} > \frac{3}{11} \qquad (2)$$

Lại một lần nữa viết như trên :

$$3\frac{1}{14} < \frac{m}{n-2m} < 3\frac{2}{3}, \text{ hay } \quad \frac{1}{14} < \frac{m-3(n-2m)}{n-2m} = \frac{7m-3n}{n-2m} < \frac{2}{3}$$

và một lần nữa : $14 > \frac{n-2m}{7m-3n} > \frac{3}{2}$ (3)

Để ý rằng giữa khoảng 14 và $\frac{3}{2}$ ta sẽ tìm được giá trị nguyên nhỏ nhất là 2. Từ n – 2m = 2 và 7m – 3n = 1 ta sẽ tìm được hai số tự nhiên n = 16 và m = 7.

Vậy nhóm học sinh đó có ít nhất là 16 người.

19. Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có :

a) $\frac{a}{9} = \frac{b}{11} = \frac{a+b}{9+11} = \frac{60}{20} = 3.$

Từ đó có ngay : a = 9.3 = 27; b = 11.3 = 33.

b) $\frac{a}{12} = \frac{b}{26} = \frac{a-b}{12-26} = \frac{7}{-14} = -\frac{1}{2}.$

Từ đó $a = 12.\left(-\frac{1}{2}\right) = -6$; $b = 26.\left(-\frac{1}{2}\right) = -13.$

• ***Lời bình :*** Ta giải thêm bài toán tương tự :

"Tìm ba số x, y, z tỉ lệ với các số 5, 6, 7 biết rằng tổng ba số đó bằng 108."

Rõ ràng ta có thể viết : $\frac{x}{5} = \frac{y}{6} = \frac{z}{7} = \frac{x+y+z}{5+6+7} = \frac{108}{18} = 6.$

Từ đó x = 5.6 = 30; y = 6.6 = 36; z = 7.6 = 42.

Vậy ba số phải tìm là x = 30, y = 36 và z = 42.

20. Theo tính chất của tỉ lệ thức ta có thể viết : $\frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2}.$

Cộng 1 vào hai vế được : $1 + \frac{a^2}{b^2} = 1 + \frac{c^2}{d^2}$, hay $\frac{a^2+b^2}{b^2} = \frac{c^2+d^2}{d^2}$

Vậy $\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2} = \frac{b^2}{d^2}.$

• ***Lời bình :*** Có thể thêm câu hỏi sau :

"Từ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ suy ra $\frac{ac}{bd} = \frac{a^2+c^2}{b^2+d^2}$." Ta có cách giải sau đây :

Đặt $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$, ta có a = bk, c = dk.

Do đó $\frac{ac}{bd} = \frac{bk.dk}{bd} = k^2$, còn $\frac{a^2+c^2}{b^2+d^2} = \frac{(bk)^2+(dk)^2}{b^2+d^2} = \frac{k^2(b^2+d^2)}{b^2+d^2} = k^2.$

Vậy ta suy ra tỉ lệ thức : $\frac{ac}{bd} = \frac{a^2+c^2}{b^2+d^2}.$

21. Ta có : $0,18(0) = \frac{180-18}{900} = \frac{162}{900} = \frac{18.9}{9.100} = \frac{9}{50}$;

$0,14(9) = \frac{149-14}{900} = \frac{135}{900} = 0,15$;

$0,(37) = \frac{37-0}{99} = \frac{37}{99}$.

- ***Lời bình :*** Tương tự, hãy *"tính tổng sau đây : $0,(3) + 3\frac{1}{3} + 0,4(2)$."*

Ta có : $0,(3) = \frac{3-0}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$; $0,4(2) = \frac{42-4}{90} = \frac{38}{90} = \frac{19}{45}$. Vậy :

$0,(3) + 3\frac{1}{3} + 0,4(2) = \frac{1}{3} + \frac{10}{3} + \frac{19}{45} = \frac{11}{3} + \frac{19}{45} = \frac{165+19}{45} = \frac{184}{45} = 4\frac{4}{45}$.

22. Ta có :

a) $\frac{24}{33} = 0,727272... = 0,(72)$. Do đó $2\frac{24}{33} = 2,(72)$;

$\frac{19}{132} = 0,143939... = 0,14(39)$. Do đó $-1\frac{19}{132} = -1,14(39)$.

b) Do $0,(26) = 0,2626...$ nên $0,(26) > 0,261$;

Cũng do $-3,(776) = -3,776776...$ nên $-3,776 < -3,(776)$.

- ***Lời bình :*** Tương tự :

c) *"Viết các số hữu tỉ $\frac{8}{123}$ và $-1\frac{3}{13}$ dưới dạng số thập phân tuần hoàn."*

d) *"So sánh : $-2\frac{2}{3}$ và $-2,67$; $\frac{1}{7}$ và $0,1428(57)$."*

Ta có :

c) $\frac{8}{123} = 0,(06504)$ và $-1\frac{3}{13} = -1,(230769)$;

d) $-2\frac{2}{3} = -2,6666 = -2,(6)$. Do đó $-2\frac{2}{3} > -2,67$;

$\frac{1}{7} = 0,(142857)$. Do đó $\frac{1}{7} < 0,1428(57)$.

23. a) Giữa hai số vô tỉ $\sqrt{2}$ và $\sqrt{3}$ có số hữu tỉ là $\frac{3}{2}$.

b) Giữa hai số hữu tỉ $\frac{1}{2}$ và $\frac{3}{5}$ có các số vô tỉ là :

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{1000} \text{ và } \frac{3}{5} - \frac{\sqrt{2}}{10000}.$$

- ***Lời bình :*** Tương tự :

c) *"Cho ví dụ về ba số hữu tỉ giữa các số 1 và $\sqrt{2}$ "*

d) *"Cho ví dụ về hai số vô tỉ giữa các số 1 và 1,1."*

Trả lời :

c) Giữa các số 1 và $\sqrt{2}$ có ba số hữu tỉ sau : 1,1; 1,01 và 1,001.

d) Giữa các số 1 và 1,1 có hai số vô tỉ sau : $1 + \frac{\sqrt{2}}{100}$ và $1 + \frac{\sqrt{3}}{100}$.

24. Ta có :

a) $3^3 + 4^3 + 5^3 = 27 + 64 + 125 = 216 = 6^3$;

b) $12^8.9^{12} = (12^2.9^3)^4 = (2^4.3^8)^4 = (18^4)^4 = 18^{16}$;

c) $14,2.11 + 14,2.41 + 5,8.11 + 5,8.41 = 14,2(11 + 41) + 5,8(11 + 41)$
$= 52(14,2 + 5,8) = 52.20 = 1040.$

- ***Lời bình :*** Tương tự, *"hãy thử lại các đẳng thức sau :*

a) $(1 + 2 + 3 + 4)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$;

b) $75^{20} = 45^{10}.5^{30}$; c) $\frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} + ... + \frac{1}{63.65} = \frac{6}{65}$."

Ta có :

a) $10^2 = 1 + 8 + 27 + 64\ (= 100)$;

b) $75^{20} = 25^{20}.3^{20} = 5^{40}.9^{10} = (5.9)^{10}.5^{30} = 45^{10}.5^{30}$;

c) $\frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} + ... + \frac{1}{63.65} =$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) + ... + \left(\frac{1}{61} - \frac{1}{63}\right) + \left(\frac{1}{63} - \frac{1}{65}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{65}\right) = \frac{6}{65}.$$

D. ĐỐ BẠN GIẢI ĐƯỢC

Biểu thị các số

1. Biểu thị số 1000 bằng :

a) năm hoặc chín chữ số 9 (ví dụ $999\frac{9}{9} = 1000$ với năm chữ số 9)

b) sáu chữ số 3

c) mười ba chữ số 5

d) tất cả mười chữ số (từ 0; 1; ...; 9).

2. Biểu thị số 100 bằng :

a) năm chữ số 1 b) năm chữ số 3 c) năm chữ số 5.

§7. TỪ ĐƠN THỨC ĐẾN ĐA THỨC

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

1. Đơn thức

a) Đơn thức là biểu thức đại số chỉ gồm một số, hoặc một biến, hoặc một tích giữa các số và các biến.

b) Bậc của đơn thức có hệ số khác 0 là tổng các số mũ của tất cả các biến có trong đơn thức.

Số thực khác 0 là đơn thức bậc 0; số 0 được coi là đơn thức không có bậc.

c) Muốn nhân hai đơn thức ta nhân các hệ số với nhau và các phần biến với nhau.

d) Hai đơn thức đồng dạng là hai đơn thức có hệ số khác 0 và có cùng phần biến.

e) Muốn cộng (hay trừ) các đơn thức đồng dạng, ta cộng (hay trừ) các hệ số với nhau và giữ nguyên phần biến.

2. Đa thức

a) Đa thức là một tổng của những đơn thức. Mỗi đơn thức trong tổng được gọi là một hạng tử của đa thức đó.

b) Bậc của đa thức là bậc của hạng tử có bậc cao nhất trong dạng thu gọn của đa thức đó.

c) Đa thức một biến là tổng của những đơn thức của cùng một biến.

d) Muốn cộng hoặc trừ hai đa thức một biến, ta có thể thực hiện theo một trong hai cách sau :

- Thực hiện theo cách cộng, trừ đa thức;
- Sắp xếp các hạng tử của hai đa thức cùng theo lũy thừa giảm (hoặc tăng) của biến, rồi đặt các phép tính theo cột dọc tương tự như cộng, trừ các số (chú ý đặt các đơn thức đồng dạng trong cùng một cột).

e) Nghiệm của đa thức một biến : Nếu tại x = a, đa thức P(x) có giá trị bằng 0 thì ta nói a (hoặc x = a) là một nghiệm của đa thức đó. Một đa thức (khác đa thức không) có thể có một nghiệm, hai nghiệm, ..., hoặc vô nghiệm.

B. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

1. Tính nhanh giá trị của biểu thức :

$$\frac{a^2(b+c^2)(a^3-c^6)(a^2-c)}{a^2+c^2} \text{ với } a=-4,\ c=16.$$

2. Tính nhanh giá trị của biểu thức : $3\frac{1}{117}.4\frac{1}{119} - 1\frac{116}{117}.5\frac{118}{119} - \frac{5}{119}$.

3. Số 1973 có thể viết dưới hai dạng sau :

a) $1973 = 1^7.(9^4 - 7^4 - 3^7)$

b) $1973 = (1 + 9^2.7^2 + 3) - [(1 + 9)^3 + (7 + 3)^3]$.

Hãy dùng các dấu : +, –, . , : và các số mũ, cùng với các dấu ngoặc ( ) và [ ] để viết 1973 theo cách tương tự như trên (viết được càng nhiều càng tốt).

4. Chứng minh rằng :

Nếu có tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ thì $\left(\frac{a-b}{c-d}\right)^{2014} = \frac{a^{2014} + b^{2014}}{c^{2014} + d^{2014}}$.

5. Rút gọn biểu thức : $2p - m - \{2m - p - [p + 3m - (5p - m)]\}$

khi $m = a^2 + 2ab + b^2$ và $p = a^2 - 2ab + b^2$.

6. a) Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $A = (2x + 1)^2 - 3$.

b) Tính giá trị lớn nhất của biểu thức : $B = 5 - (3y - 1)^4$.

7. Cho các đơn thức $\frac{2}{3}mx^4y^3$; $-7n^5x^0my^4$; $\frac{mn^2}{5}x^7y^{10}$ trong đó m, n là các hằng số, còn x, y là các biến.

a) Xác định hệ số của mỗi đơn thức.

b) Xác định bậc của đơn thức đối với từng biến và đối với tập hợp các biến.

8. a) Tính tổng các đơn thức :

$$3x^2y^5 - \left(\frac{1}{5}x^2y^5 + 321y^5x^2 - x^2y^5\right) + \left(-\frac{19}{5}x^2y^5\right) + 321y^5x^2.$$

b) Tính tích các đơn thức và tìm bậc của đơn thức thu được :

$$(-7x^3y^2)^3.(mx^7y^{12})^2.(-2mxy^3)^4.$$

9. a) Tính tổng các đa thức và tìm bậc của đa thức thu được :

$$(4x^2 - x^2y - 5y^3) + (6y^3 - 15xy^2 - 4x^2y - 10x^3) - (-2x^3 + 6xy^2 + x^2y) - (-3x^3 - 10y^3).$$

b) Tính hiệu các đa thức và tìm bậc của đa thức thu được :

$$(5{,}7z^2t - 3{,}1zt + 8t^3) - (6{,}9zt - 2{,}3z^2t^2 + 8t^3).$$

10. Giải thích tại sao :

a) Tổng của số có hai chữ số $\overline{ab}$ và số có hai chữ số viết theo thứ tự ngược lại $\overline{ba}$ là một số chia hết cho 11. Cho ví dụ.

b) Hiệu của số có ba chữ số $\overline{abc}$ và số có ba chữ số viết theo thứ tự ngược lại $\overline{cba}$ cũng là một số chia hết cho 11. Cho ví dụ.

11. Chứng minh rằng :

a) Số $\overline{aabb}$ chia hết cho 11, cho ví dụ.

b) Số $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ chia hết cho 3 và cho 37, cho ví dụ.

12. Tìm số p có tính chất sau : nếu tổng các chữ số a + b mà chia hết cho p thì các số $\overline{abbb}$ và $\overline{baaa}$ cũng chia hết cho p.

13. Cho số 111...11 gồm n chữ số 1. Hỏi n bằng bao nhiêu để số này chia hết cho 13 ?

14. Cho các đa thức một biến :

$$A = -3x(x - 3) + 3x^4 - x^2(x - 3) - 9x + 2$$

$$B = 2x^2(x^2 + 3) - 4x^3 + 2(x - 1) + 3.$$

a) Thu gọn các đa thức trên và sắp xếp chúng theo lũy thừa giảm của biến.

b) Tính A + B.

15. Thu gọn các đa thức sau rồi tìm nghiệm của chúng :

a) $(2t^2 - 5t + 1) - (t^2 + 3t + 1)$

b) $(3t^2 - 2t + 1) - (3t^2 - 2t + 5)$.

16. Cho đa thức $f(t) = at^2 + bt + c$. Tìm các hệ số a, b, c biết rằng khi thay t lần lượt bằng 0, 1, 2 ta được $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 2$.

17. Cho các đa thức : $A = 5a^4 - 8a^3b + 2a^2b^2 - 4ab^3 - b^4$;

$$B = a^4 + 3a^3b - 5a^2b^2 - 6ab^3 - 2b^4;$$

$$C = -4a^4 + 5a^3b - 7a^2b^2 + 10ab^3 - 5b^4.$$

Tính : a) A + B – C   b) –A – B + C.

Có nhận xét gì về hai kết quả tìm được ?

18. Chứng minh rằng các đa thức sau đây có giá trị không âm với mọi giá trị của x, y :

a) $x^2 - 2x + 2y^2 + 8y + 9$ b) $(x^2 - xy + y^2)^3 + (x^2 + xy + y^2)^3$.

Khi nào thì có đẳng thức ?

19. Viết dưới dạng đa thức :

a) $\overline{mn} + 2m - 3n$ b) $\left(\overline{ab}\right)^2 - \overline{ab}$ c) $\overline{abc} - \overline{bc} + a$.

20. Chứng minh rằng :

a) Biểu thức mn(m + n) chia hết cho 2 với mọi m, n.

b) Hiệu $2011^8 - 2011^7$ chia hết cho 2010.

C. CÁCH GIẢI VÀ LỜI BÌNH

1. Do a = –4, c = 16 nên $a^2 = c = 16$, vì vậy thừa số cuối $a^2 - c$ ở tử của biểu thức đã cho bằng 16 – 16 = 0. Do đó biểu thức bằng 0.

- ***Lời bình :*** Tương tự, hãy *"tính nhanh giá trị của biểu thức :*

$$a^2(a + b^2)(a^4 - b^{10})(a^2 - b) \text{ với } a = -25,\ b = -5."$$

Ta thấy rằng $b^2 = (-5)^2 = 25$ và a = –25

nên thừa số thứ hai $a + b^2 = -25 + 25 = 0$, do đó biểu thức đã cho bằng 0.

2. Đặt $\frac{1}{117} = a$, $\frac{1}{119} = b$. Ta nhận thấy rằng hỗn số $m\frac{1}{n}$ có thể viết dưới dạng một tổng $m + \frac{1}{n}$ nên :

$$3\frac{1}{117} = 3 + \frac{1}{117} = 3 + a; \quad 4\frac{1}{119} = 4 + \frac{1}{119} = 4 + b;$$

$$1\frac{116}{117} = 1 + \frac{116}{117} = 1 + 1 = 2 - a; \text{ v.v...}$$

Vậy biểu thức đã cho có thể viết :

$$(3 + a)(4 + b) - (2 - a)(6 - b) - 5b = 10a = \frac{10}{117}.$$

- ***Lời bình :*** Tương tự, hãy *"tính nhanh giá trị của biểu thức :*

$$2012(2013^9 + 2013^8 + ... + 2013^2 + 2014) + 1."$$

Ta đặt 2013 = m thì biểu thức đã cho có thể viết :

$$(m - 1)(m^9 + m^8 + ... + m^2 + m + 1) + 1$$

$$= (m^{10} + m^9 + m^8 + ... + m^3 + m^2 + m) - (m^9 + m^8 + ... + m^2 + m + 1) + 1$$

$$= m^{10}.$$

Vậy giá trị của biểu thức đã cho bằng 2013^{10}.

3. Ta có thể viết theo các cách sau đây :

a) $1973 = (19^2 + 7^4 - 3^6) - (1.9.7 - 3)$

b) $1973 = (-1^2 - 9^3 + 7^4 + 3^5) - (1 - 9.7 + 3)$

c) $1973 = [1^4 + (9 - 7)^{11} - 3^4] - [1 - (9 - 7)^3]$

d) $1973 = [(1 + 9)^3 + (7 + 3)^3] + [(1 - 9 + 7).3^3]$

e) $1973 = [(1 + 9)^3 + (7 + 3)^3] - [1^3 - (9 + 7)^0 + 3^3]$.

- ***Lời bình :*** Nếu bây giờ, *"số 1973 có thể biểu diễn dưới dạng tích, chẳng hạn : 1973 = 1.2.3...8.9 và 1973 = 9.8.7...2.1.*

Hãy dùng các dấu +, –, . và dấu ( ) để xen vào giữa các chữ số của số 123...89 và số 987...21 sao cho được kết quả là 1973."

Cách giải sẽ như sau :

a) $(-1 + 2).34.56 + 78 - 9 = 1973$

b) $9 + 8 - 7 + 654.3 + 2 - 1 = 1973$.

4. Tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ có thể viết $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$. Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có : $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{a-b}{c-d}$ hay nâng lên lũy thừa 2014 :

$$\frac{a^{2014}}{c^{2014}} = \frac{b^{2014}}{d^{2014}} = \frac{(a-b)^{2014}}{(c-d)^{2014}}.$$

Áp dụng lần nữa tính chất dãy tỉ số bằng nhau sẽ được :

$$\frac{a^{2014} + b^{2014}}{c^{2014} + d^{2014}} = \frac{(a-b)^{2014}}{(c-d)^{2014}}.$$

• ***Lời bình :*** Ta giải thêm bài toán sau :

"Tìm giá trị nhỏ nhất của tỉ số $\frac{\overline{abc}}{a+b+c}$ trong đó $\overline{abc}$ là số có ba chữ số."

Cách giải như sau :

Tỉ số đã cho có thể viết : $k = \frac{100a + 10b + c}{a + b + c} = 1 + 9.\frac{11a + b}{a + b + c}$.

Ta có k nhỏ nhất khi c lớn nhất (với a, b xác định), tức là khi $c = 9$. Khi đó : $k = 10 + 9.\frac{10a - 9}{a + b + 9}$.

Với a xác định, k sẽ nhỏ nhất khi $b = 9$. Khi đó :

$$k = 10 + 9.\frac{10a - 9}{a + 18} = 10 + 9.\frac{10(a + 18) - 189}{a + 18} = 100 - \frac{9.189}{a + 18}$$

và k sẽ nhỏ nhất khi a nhỏ nhất tức là khi $a = 1$.

Suy ra số phải tìm $\overline{abc} = 199$ và tỉ số $k = \frac{199}{1 + 9 + 9} = \frac{199}{19} = 10\frac{9}{19}$.

Lưu ý là bài toán này có thể mở rộng cho số gồm n chữ số.

5. Trước tiên ta rút gọn biểu thức, sau đó mới thay các giá trị của m và p vào biểu thức đã rút gọn. Ta có :

$$2p - m - \{2m - p - [p + 3m - (5p - m)]\}$$
$$= 2p - m - \{2m - p - [p + 3m - 5p + m]\}$$
$$= 2p - m - \{2m - p + 4p - 4m\}$$
$$= 2p - m - 3p + 2m = m - p.$$

Thay các giá trị của m và p vào biểu thức rút gọn m – p này được :

$$m - p = a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2)$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2 = 4ab.$$

• ***Lời bình :*** Tương tự, hãy *"rút gọn biểu thức $6m - 4 - |3m - 1|$."*

Ta có : $|3m - 1| = \begin{cases} 3m - 1 \text{ khi } m \geq \frac{1}{3} \\ 1 - 3m \text{ khi } m < \frac{1}{3}. \end{cases}$

Do đó : Với $m \geq \frac{1}{3}$ biểu thức có giá trị $6m - 4 - (3m - 1) = 3m - 3$;

Với $m < \frac{1}{3}$ biểu thức có giá trị $6m - 4 - (1 - 3m) = 9m - 5$.

6. a) Với mọi x ta luôn có $(2x + 1)^2 \geq 0$ nên biểu thức $A = (2x + 1)^2 - 3 \geq -3$, do đó giá trị nhỏ nhất của $(2x + 1)^2 - 3$ bằng -3 khi $2x + 1 = 0$, tức là khi $x = -\frac{1}{2}$.

Vậy khi $x = -\frac{1}{2}$ thì biểu thức A có giá trị nhỏ nhất bằng -3.

b) Với mọi y ta luôn có $(3y - 1)^4 \geq 0$. Nhân hai vế với -1 ta có $-(3y - 1)^4 \leq 0$ (nhớ đổi dấu ≥ 0 thành ≤ 0). Thêm 5 vào hai vế được $B = 5 - (3y - 1)^4 \leq 5$.

Do đó giá trị lớn nhất của B bằng 5 khi $3y - 1 = 0$, tức là khi $y = \frac{1}{3}$.

Vậy khi $y = \frac{1}{3}$ thì biểu thức B có giá trị lớn nhất bằng 5.

• ***Lời bình :*** Tương tự, ta có bài toán sau :

c) *"Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $C = (x^2 - 9)^6 + |y - 5| - 1$."*

d) *"Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức : $D = \frac{3}{3t^2 + 6}$."*

Cách giải như sau :

c) Với mọi x ta luôn có $(x^2 - 9)^6 \geq 0$ và với mọi y ta luôn có $|y - 5| \geq 0$, do đó biểu thức $(x^2 - 9)^2 + |y - 5| \geq 0$ nên

$$C = (x^2 - 9)^6 + |y - 5| - 1 \geq -1.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của C bằng -1 khi $(x^2 - 9)^6 + |y - 5| = 0$.

Mà tổng của hai số không âm bằng 0 khi và chỉ khi mỗi số đó phải bằng 0, tức là ta có :

$(x^2 - 9)^6 = 0$, suy ra $x^2 - 9 = 0$, từ đó $x = \pm 3$;

$|y - 5| = 0$, suy ra $y - 5 = 0$, từ đó $y = 5$.

Vậy khi $x = \pm 3$, $y = 5$ thì biểu thức C có giá trị nhỏ nhất bằng -1.

d) Ta luôn có $3t^2 + 6 \geq 6$ với mọi t. Ngoài ra, nếu hai phân số có cùng tử là 3 thì phân số nào có mẫu lớn hơn là phân số nhỏ hơn, do đó ta có : $\frac{3}{3t^3 + 6} \leq \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Giá trị lớn nhất của biểu thức $D = \frac{3}{3t^2 + 6}$ bằng $\frac{1}{2}$ khi $t = 0$.

Vậy khi $t = 0$ thì biểu thức D có giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{2}$.

7. a) Hệ số của mỗi đơn thức đã cho theo thứ tự là : $\frac{2m}{3}$; $-7n^5m$; $\frac{mn^2}{5}$.

b) Đơn thức $\frac{2}{3}mx^4y^3$ có bậc 4 đối với biến x, bậc 3 đối với biến y và bậc 7 đối với tập hợp các biến x, y;

Đơn thức $-7n^5x^0my^4$ có bậc 4 đối với biến y (vì $x^0 = 1$) và bậc 4 đối với tập hợp các biến x, y;

Đơn thức $\frac{mn^2}{5}x^7y^{10}$ có bậc 7 đối với biến x, bậc 10 đối với biến y và bậc 17 đối với tập hợp các biến x, y.

• ***Lời bình :*** Có thể hỏi thêm : *"Các đơn thức nào là đồng dạng nếu có ba đơn thức : $\frac{1}{3}mxy^5$; $9mx^3y^5$ và $-\frac{5}{7}m^3xy^5$ với :*

a) *m là hằng, x và y là biến ?*

b) *x và y là hằng, m là biến ?"*

Câu trả lời như sau :

a) Khi m là hằng, x và y là biến thì có hai đơn thức đồng dạng là $\frac{1}{3}mxy^5$ và $-\frac{5}{7}m^3xy^5$ (vì có phần biến đều là xy^5);

b) Khi x và y là hằng, m là biến thì có hai đơn thức đồng dạng là $\frac{1}{3}xy^5m$ và $9x^3y^5m$ (vì có phần biến đều là m).

8. a) Các đơn thức đã cho đều đồng dạng, để tính tổng của chúng ta cộng (hay trừ) các hệ số với nhau và giữ nguyên phần biến. Ta có thể viết, sau khi bỏ các dấu ngoặc :

$$3x^2y^5 - \frac{1}{5}x^2y^5 - 321y^5x^2 + x^2y^5 - \frac{19}{5}x^2y^5 + 321y^5x^2$$

$$= \left(3 - \frac{1}{5} - 321 + 1 - \frac{19}{5} + 321\right)x^2y^5 = 0.x^2y^5 = 0.$$

b) Để nhân ba đơn thức ta nhân các hệ số với nhau và nhân các phần biến với nhau. Ta có, sau khi nâng lên lũy thừa :

$$(-343x^9y^6).(m^2x^{14}y^{24}).(16m^4x^4y^{12})$$

$$= (-343.m^2.16m^4).(x^9y^6.x^{14}y^{24}.x^4y^{12}) = -5488m^6.x^{27}.y^{42}.$$

Đơn thức thu được có bậc 69.

- ***Lời bình :*** Tương tự, hãy trả lời thêm các câu hỏi sau :

c) *"Viết các đơn thức A, B, C biết rằng : $A + B + C = x^9$."*

d) *"Viết các đơn thức M, N, P biết rằng : $M.N.P = y^{99}$."*

Các câu hỏi này có nhiều đáp số, sau đây là hai đáp số, chẳng hạn :

c) $7x^9 - 5x^9 - x^9 = x^9$; $\quad -11x^9 - 4x^9 + 16x^9 = x^9$.

d) $y.y^9.y^{89} = y^{99}$; $\quad y^{11}.y^{55}.y^{33} = y^{99}$.

9. a) Bỏ các dấu ngoặc ta có :

$$4x^2 - x^2y - 5y^3 + 6y^3 - 15xy^2 - 4x^2y - 10x^3 + 2x^3 - 6xy^2 - x^2y + 3x^3 + 10y^3$$
$$= 4x^2 - 6x^2y - 21xy^2 + 5x^3 + 11y^3.$$

Đa thức thu được có bậc 3 đối với hai biến x, y.

b) Bỏ các dấu ngoặc ta có :

$$5{,}7z^2t^2 - 3{,}1zt + 8t^3 - 6{,}9zt + 2{,}3z^2t^2 - 8t^3 = 8z^2t^2 - 10zt.$$

Đa thức thu được có bậc 4 đối với hai biến z, t.

- ***Lời bình :*** Tương tự, hãy *"tìm đa thức M biết :*

a) *$5xyz - 12x^2yz^2 - 17xy^3 - 21x^2yz^2 - 6xyz + M = 0$;*

b) *$M - (6x^4y^3 - 7xyz^3 + 9xyz) = 4x^4y^3 - 3xyz^3 - 5xyz$."*

Tìm đa thức M ở đây là thực hiện một phép cộng hoặc trừ hai đa thức.

a) Ta có ngay :

$$M = -5xyz + 12x^2yz^2 + 17xy^3 + 21x^2yz^2 + 6xyz$$
$$= xyz + 33x^2yz^2 + 17xy^3.$$

b) $$M = 4x^4y^3 - 3xyz^3 - 5xyz + (6x^4y^3 - 7xyz^3 + 9xyz)$$
$$= 4x^4y^3 + 6x^4y^3 - 3xyz^3 - 7xyz^3 - 5xyz + 9xyz$$
$$= 10x^4y^3 - 10xyz^3 + 4xyz.$$

10. a) Ta có : $\overline{ab} + \overline{ba} = 10a + b + 10b + a = 11a + 11b = 11(a + b)$

Số này chia hết cho 11.

Ví dụ : 79 + 97 = 176 chia hết cho 11 (thương là 16).

b) Ta lại có : $\overline{abc} - \overline{cba} = 100a + 10b + c - (100c + 10b + a)$

$= 100a + 10b + c - 100c - 10b - a = 99a - 99c$

$= 99(a - c)$. Số này cũng chia hết cho 11.

Ví dụ : 572 – 275 = 297 chia hết cho 11 (thương là 27).

• ***Lời bình :*** *"Nếu là hiệu $\overline{ab} - \overline{ba}$ thì sao ? Nếu là tổng $\overline{abc} + \overline{cba}$ thì sao ?"*

- Xét hiệu $\overline{ab} - \overline{ba} = 10a + b - (10b + a) = 10a + b - 10b - a$

$= 9a - 9b = 9(a - b)$. Số này chia hết cho 9.

Ví dụ : 91 – 19 = 72 chia hết cho 9 (thương là 8).

- Xét tổng $\overline{abc} + \overline{cba} = 100a + 10b + c + 100c + 10b + a$

$= 101a + 20b + 101c$.

Số này không chia hết cho 9 và cho bất cứ số nào.

11. a) Ta có : $\overline{aabb} = 1000a + 100a + 10b + b = 1100a + 11b$

$= 11(100a + b)$, chia hết cho 11.

Ví dụ : 7755 chia hết cho 11 (thương là 705).

b) Tổng đã cho có thể viết :

$\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 100a + 10b + c + 100b + 10c + a + 100c + 10a + b$

$= 100(a + b + c) + 100(a + b + c) + (a + b + c)$

$= 111(a + b + c)$.

Do 111 = 3.37 nên $111(a + b + c)$ chia hết cho 3 và cho 37 (thương là 444) và chia hết cho 37 (thương là 36).

• ***Lời bình :*** Tương tự, *"hãy chứng minh các số $\overline{aaa}$ và $\overline{aaaaaa}$ đều chia hết cho 37."*

Ta có : $\overline{aaa} = 100a + 10a + a = 111a = 37.3.a$, chia hết cho 37.

$\overline{aaaaaa} = \overline{aaa}.1000 + \overline{aaa}$, cả hai số hạng của tổng đều chia hết cho 37 nên tổng của chúng cũng chia hết cho 37.

Ví dụ : Số 555 chia hết cho 37 (thương là 15).

Số 777777 chia hết cho 37 (thương là 21021).

12. Ta thấy ngay số p = 1 thỏa mãn bài ra.

Giả sử a + b chia hết cho p, thế thì theo điều kiện đề bài số 1000a + 111b chia hết cho p, từ đó hiệu : (1000a + 111b) – 111(a + b) = 889a chia hết cho p.

Nếu a và b là hai số nguyên tố cùng nhau thì a chia hết cho p, thế thì $2 \le p \le 9$, mâu thuẫn ! Vì tổng $1 + (p - 1)$ chia hết cho p nhưng 1 lại không chia hết cho p. Vì thế các số p và $889 = 7.127$ có ước chung khác 1 nên $p = 7$.

Vậy có hai số thỏa mãn bài ra là $p = 1$ và $p = 7$.

- ***Lời bình :*** Ta có thể *"tìm xem các số $\overline{abbb}$ và $\overline{baaa}$ là những số nào ?"*

– Nếu $p = 1$ thì tổng $a + b$ chia hết cho 1, tức là $a = 0$, $b = 1$ hoặc $a = 1$, $b = 0$, ta sẽ được các số $\overline{abbb} = 111$ và $\overline{baaa} = 111$ đều chia hết cho 1.

– Nếu $p = 7$ thì tổng $a + b$ chia hết cho 7, tức là :

$a = 1, b = 6$ hoặc $a = 6, b = 1$, ta có số 1666 chia hết cho 7;

$a = 2, b = 5$ hoặc $a = 5, b = 2$, ta có số 2555 chia hết cho 7;

$a = 3, b = 4$ hoặc $a = 4, b = 3$, ta có số 3444 chia hết cho 7.

13. Trước hết ta thấy rằng hai số 1 và 11 không thể chia hết cho 41. Ta thử chia các số tiếp theo 111, 1111, ..., cho 41 thì thấy rằng số đầu tiên chia hết cho 41 là số 11111 (với năm chữ số 1).

Với các số tiếp theo 111111; 1111111; ...; thì chỉ có số 1111111111 (với mười chữ số 1) chia hết cho 41. Thử lại với số 111111111111111 (với mười lăm chữ số 1) thì lại thấy số này cũng chia hết cho 41.

Vậy số 111...11 với n chữ số 1 chia hết cho 41 khi n là bội của 5.

- ***Lời bình :*** *"Biết rằng số 1001 chia hết cho 13 (hai chữ số 1 và hai chữ số 0) hỏi với n bằng bao nhiêu ta có thể lập được số gồm n chữ số 1 và n chữ số 0 chia hết cho 13 ?"*

Ta nhận thấy rằng ngoài số 1001 còn có số 101010 (ba chữ số 1 và ba chữ số 0) cũng chia hết cho 13. Từ đó ta thấy các số dạng :

10011001...1001 và 10101010011001...1001 đều chia hết cho 13

Như vậy tất cả những số lẻ n cũng như những số chẵn n lớn hơn hoặc bằng 3 ($n \ge 3$) đều chia hết cho 13.

14. a) Ta có : $A = -3x(x - 3) + 3x^4 - x^2(x - 3) - 9x + 2$

$= -3x^2 + 9x + 3x^4 - x^3 + 3x^2 - 9x + 2 = 3x^4 - x^3 + 2$

$B = 2x^2(x^2 + 3) - 4x^3 + 2(x - 1) + 3$

$= 2x^4 + 6x^2 - 4x^3 + 2x - 2 + 3 = 2x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 2x + 1.$

b) Để tính tổng A + B ta sắp xếp như sau :

$$\begin{array}{r} A = 3x^4 - x^3 + 2 \\ + \quad B = 2x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 2x + 1 \\ \hline A + B = 5x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 2x + 3 \end{array}$$

• ***Lời bình :*** Tương tự, *"Cho hai đa thức :*

$$C = \frac{2}{3}y^4 - \frac{3}{4}y(y+6) - \frac{1}{3}y^3 + y - \frac{2}{5}; \quad D = \frac{1}{5}y(y-5) - 3y^4 + 2.$$

Thu gọn các đa thức trên và sắp xếp chúng theo lũy thừa tăng của biến, rồi tính hiệu C – D."

Cách làm như sau :

$$C = \frac{2}{3}y^4 - \frac{3}{4}y^2 - \frac{9}{2}y - \frac{1}{3}y^3 + y - \frac{2}{5} = -\frac{2}{5} - \frac{7}{2}y - \frac{3}{4}y^2 - \frac{1}{3}y^3 + \frac{2}{3}y^4$$

$$D = \frac{1}{5}y^2 - y - 3y^4 + 2 = 2 - y + \frac{1}{5}y^2 - 3y^4.$$

Ta có hiệu C – D bằng :

$$\begin{array}{rl} C = & -\frac{2}{5} - \frac{7}{2}y - \frac{3}{4}y^2 - \frac{1}{3}y^3 + \frac{2}{3}y^4 \\ - \quad D = & 2 - y + \frac{1}{5}y^2 - 3y^4 \\ \hline C - D = & -\frac{12}{5} - \frac{5}{2}y - \frac{19}{20}y^2 - \frac{1}{3}y^3 + \frac{11}{3}y^4. \end{array}$$

15. a) Ta có : $(2t^2 - 5t + 1) - (t^2 + 3t + 1) = 2t^2 - 5t + 1 - t^2 - 3t - 1 = t^2 - 8t$.

Xét $t^2 - 8t = 0$ hay $t(t - 8) = 0$ ta được hai nghiệm là $t_1 = 0$, $t_2 = 8$.

b) $(3t^2 - 2t + 1) - (3t^2 - 2t + 5) = 3t^2 - 2t + 1 - 3t^2 + 2t - 5 = -4$.

Rõ ràng (–4) không thể bằng 0 nên đa thức này không có nghiệm. Nó là đa thức bậc 0 (vì $-4 = -4t^0$).

• ***Lời bình :*** Tương tự, *"hãy tìm nghiệm của các đa thức sau :*

c) $t(t + 4) - (t^2 + 4t)$ *d)* $\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$."

Ta có :

c) $t(t + 4) - (t^2 + 4t) = t^2 + 4t - t^2 - 4t = 0$, hay $0.t = 0$, đa thức này có vô số nghiệm, t là bất cứ số nào.

d) Vì $\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ nên $\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, do đó đa thức đã cho không có nghiệm.

16. Ta hãy thay t lần lượt bằng 0, 1 và 2 được :

$f(0) = 0 + b.0 + c = 1$ (1)

$f(1) = a + b + c = 2$ (2)

$f(2) = 4a + 2b + c = 2$ (3)

Từ (1) ta có ngay c = 1. Thay c = 1 vào (2) được a + b = 1 (4), vào (3) được 4a + 2b = 1 (5) hay 4a = 1 − 2b, mà từ (4) có b = 1 − a nên :

$$4a = 1 - 2b = 1 - 2(1 - a) = 1 - 2 + 2a - 2a - 1.$$

Từ đó tìm được $a = -\frac{1}{2}$ và $b = \frac{3}{2}$.

Vậy đa thức phải tìm là : $-\frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + 1$.

- ***Lời bình :*** Tương tự :

a) "Tìm hệ số c của đa thức $f(t) = 5t^2 - 6t + c$ biết một nghiệm của nó là −1"

b) "Tìm hệ số b của đa thức $f(t) = 3t^2 + bt + 4$ biết một nghiệm của nó là −2."

Cách giải như sau :

a) Ta có $f(-1) = 5 + 6 + c = 0$ hay $f(-1) = 11 + c = 0$, suy ra $c = -11$

tức là $f(t) = 5t^2 - 6t + 11$.

b) Ta có $f(-2) = 12 - 2b + 4 = 0$ hay $f(-2) = 16 - 2b = 0$, suy ra $b = 8$,

tức là $f(t) = 3t^2 + 8t + 4$.

17. Ta nhận thấy rằng các đa thức đã cho đã được sắp xếp theo lũy thừa giảm dần của a và theo lũy thừa tăng dần của b. Do đó để tính toán ta chỉ cần sắp xếp các phép tính như sau :

a)
$$\begin{aligned} A &= 5a^4 - 8a^3b + 2a^2b^2 - 4ab^3 - b^4 \\ B &= a^4 + 3a^3b - 5a^2b^2 - 6ab^3 - 2b^4 \\ -C &= 4a^4 - 5a^3b + 7a^2b^2 - 10ab^3 + 5b^4 \\ \hline A + B - C &= 10a^4 - 10a^3b + 4a^2b^2 - 20ab^3 + 2b^4. \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} -A &= -5a^4 + 8a^3b - 2a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\ -B &= -a^4 - 3a^3b + 5a^2b^2 + 6ab^3 + 2b^4 \\ C &= -4a^4 + 5a^3b - 7a^2b^2 + 10ab^3 - 5b^4 \\ \hline -A - B + C &= -10a^4 + 10a^3b - 4a^2b^2 + 20ab^3 - 2b^4. \end{aligned}$$

Ta nhận thấy rằng các số hạng của đa thức A + B − C khác dấu với các số hạng tương ứng của đa thức −A − B + C. Sở dĩ như vậy vì :

$$-(A + B - C) = -A - B + C.$$

- ***Lời bình :*** Tương tự, *"cho các đa thức : $M = 6y^3 - 4y^2 + 3y - 8$,*

$$N = 4 - 6y + 2y^3 + 5y^2; \qquad P = 4y - 5 + 2y^2 - 8y^3.$$

Hãy sắp xếp mỗi đa thức theo lũy thừa tăng dần của y rồi tính :

$$M + N + P \text{ và } M - (-N - P).$$

So sánh hai kết quả và giải thích tại sao."

Trước hết ta sắp xếp mỗi đa thức theo lũy thừa tăng dần của y :

$$M = -8 + 3y - 4y^2 + 6y^3$$
$$N = 4 - 6y + 5y^2 + 2y^3$$
$$P = -5 + 4y + 2y^2 - 8y^3$$

$$M + N + P = -9 + y + 3y^2.$$

Ngoài ra ta nhận thấy rằng :

$$M - (-N - P) = M + N + P$$

nên không cần tính tổng $M - (-N - P)$ ta có thể kết luận ngay là :

$$M - (-N - P) = -9 + y + 3y^2.$$

18. Ta có :

a) $x^2 - 2x + 2y^2 + 8y + 9 = x^2 - 2x + 1 + 2(y^2 + 4y + 4)$

$= (x - 1)^2 + 2(y + 2)^2 \geq 0$, với mọi x và y.

Ta có đẳng thức khi $x = 1$, $y = -2$.

b) $(x^2 - xy + y^2)^3 + (x^2 + xy + y^2)^3 = [(x^2 - xy + y^2) + (x^2 + xy + y^2)]$

$[(x^2 - xy + y^2)^2 - (x^2 - xy + y^2)(x^2 + xy + y^2) + (x^2 + xy + y^2)^2] =$

$= 2(x^2 + y^2)[(x^2 + y^2)^2 - 2xy(x^2 + y^2) + x^2y^2]$

$= 2(x^2 + y^2)(x^2 + y^2)^2 + 3x^2y^2 \geq 0$, với mọi x, y.

Ta có đẳng thức khi $x = 0$, $y = 0$.

• ***Lời bình :***

a) Tương tự, *"hãy chứng minh biểu thức sau không âm với mọi x, y, z :*

$x^2 + 19y^2 + 6z^2 - 8xy - 4xz + 12yz$."

Ta có thể viết biểu thức đã cho như sau :

$x^2 - 2(4y + 2z)x + (4y + 2z)^2 + 3y^2 - 4yz + 2z^3$

$= (x - 4y - 2z)^2 + 2(y^2 - 2yz + z^2) + y^2$

$= (x - 4y - 2z)^2 + 2(y - z)^2 + y^2 \geq 0$, với mọi x, y, z.

Ta có đẳng thức khi $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

b) Ngoài ra *"hãy chứng minh thêm là biểu thức :*

$2x^2y^2 - 2xy(x + y) + x^2 + y^2$ không âm với mọi x, y."

Biểu thức đã cho có thể viết nếu ta cộng và trừ thêm $\pm\left(\frac{x+2}{2}\right)^2$.

Ta có :

$$2\left[x^2y^2 - xy(x+y) + \left(\frac{x+y}{2}\right)^2\right] - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + x^2 + y^2$$

$$= 2\left(xy - \frac{x+y}{2}\right)^2 + x^2 + y^2 - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

$$= 2\left(xy - \frac{x+y}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}(x-y)^2 \geq 0 \text{ với mọi x, y.}$$

19. a) $\overline{mn} + 2m - 3n = 10m + n + 2m - 3n = 12m - 2n$

b) $(10a + b)^2 - \overline{ab} = 100a^2 + 20ab + b^2 - 10a - b$

c) $100a + 10b + c - (10b + c) + a = 101a.$

- ***Lời bình :*** Tương tự, *"viết dưới dạng đa thức :*

d) $(\overline{ab})^3 - (\overline{ab})^2 - \overline{ab}$ *e)* $(\overline{ab})^2 - (\overline{ba})^2$

g) $2\overline{ab} - (\overline{ba})^2 + 4(ba)$*."*

Ta có :

d) $(\overline{ab})^3 - (\overline{ab})^2 - \overline{ab} = (10a + b)^3 - (10a + b)^2 - (10a + b)$

$= 1000a^3 + 300a^2b + 30ab^2 + b^3 - 100a^2 - 20ab - b^2 - 10a - b$

e) $(10a + b)^2 - (10b + a)^2 = 100a^2 + 20ab + b^2 - 100b - 20ab - a^2$

$= 99a^2 - 99b^2$

g) $2(10a + b) - (10b + a)^2 + 4ba = 20a + 2b - (100b^2 + 20ab + a^2) + 4ab$

$= -100b^2 - 16ab - a^2 + 20a + 2b.$

20. Ta có :

a) Nếu m hoặc n chẵn thì tích mn chẵn nên biểu thức $mn(m + n)$ chẵn, do đó chia hết cho 2.

Nếu m và n cùng lẻ thì $(m + n)$ chẵn nên biểu thức đã cho chẵn, vậy nó chia hết cho 2.

b) Ta có thể viết : $2011^8 - 2011^7 = 2011^7(2011 - 1) = 2011^7.2010$ chia hết cho 2010.

- ***Lời bình :*** Tương tự, *"Chứng minh rằng :*

c) $\overline{abc} - \overline{cba}$ *chia hết cho 9* *d)* $\overline{aaa}$ *chia hết cho 37."*

Ta có :

c) $\overline{abc} - \overline{cba} = 100a + 10b + c - 100c - 10b - a$

$= 99a - 99b = 99(a - b)$, chia hết cho 9

d) $\overline{aaa} = 100a + 10a + a = 111a = 3.37a$, chia hết cho 37.

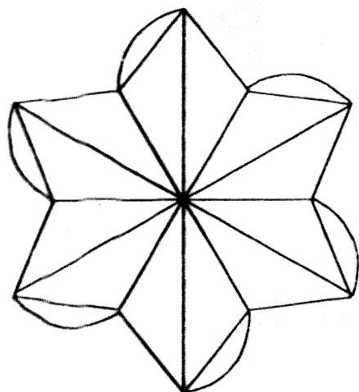
D. ĐỐ BẠN GIẢI ĐƯỢC

1. ***Ngôi sao sáu cánh*** (hình 22)

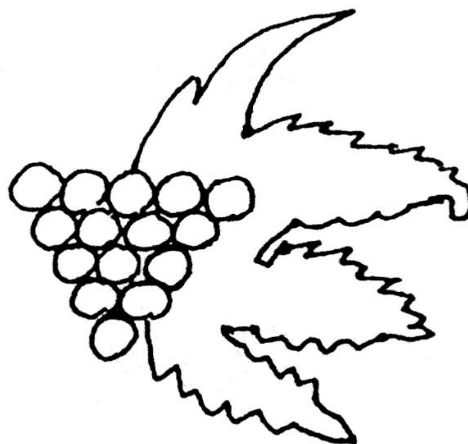
   Ngôi sao này gồm 6 cánh viền bằng 6 cung tròn nhỏ. Hãy vẽ nó bằng một nét.

2. ***Chùm nho cùng với lá*** (hình 23)

   Hãy vẽ chùm nho này bằng một nét.



H.22



H.23

§8. ĐOẠN THẲNG VÀ GÓC CÓ GÌ CẦN LƯU Ý ?

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

1. Đoạn thẳng

a) Có 3 khái niệm không định nghĩa là : điểm, đường thẳng, mặt phẳng.

b) Khi ba điểm cùng thuộc một đường thẳng, ta nói chúng thẳng hàng.

Qua hai điểm có một và chỉ một đường thẳng.

c) Hai đường thẳng có thể trùng nhau, cắt nhau hoặc song song.

d) Một tia gốc O là hình gồm điểm O và phần đường thẳng bị chia ra bởi O (tia còn được gọi là nửa đường thẳng gốc O).

Mỗi điểm trên đường thẳng là gốc chung của hai tia đối nhau.

e) Đoạn thẳng AB là hình gồm điểm A, điểm B và tất cả các điểm nằm giữa A và B.

Mỗi đoạn thẳng có một độ dài. Độ dài đó là một số dương.

g) Trung điểm M của đoạn thẳng AB là điểm nằm giữa A, B và cách đều A, B (MA = MB).

2. Góc

a) Nửa mặt phẳng bờ a là hình gồm đường thẳng a và một phần mặt phẳng bị chia ra bởi a.

b) Góc là hình gồm hai tia chung gốc.

Góc bẹt là góc có hai cạnh là hai tia đối nhau.

c) Mỗi góc có một số đo. Số đo của góc bẹt là 180°.

d) Góc có số đo bằng 90° là góc vuông, kí hiệu là 1v. Góc nhỏ hơn góc vuông là góc nhọn, góc lớn hơn góc vuông nhưng nhỏ hơn góc bẹt là góc tù.

e) Hai góc kề nhau là hai góc có một cạnh chung và hai cạnh còn lại nằm trên hai nửa mặt phẳng đối nhau có bờ chứa cạnh chung.

g) Hai góc phụ nhau là hai góc có tổng số đo bằng 90°. Hai góc bù nhau là hai góc có tổng số đo bằng 180°.

h) Tia phân giác của một góc là tia nằm giữa hai cạnh của góc và tạo với hai cạnh ấy hai góc bằng nhau.

i) Đường tròn tâm O, bán kính R, là hình gồm các điểm cách O một khoảng bằng R, kí hiệu (O; R).

k) Tam giác ABC là hình gồm ba đoạn thẳng AB, BC, CA khi ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

B. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

1. Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng. Hãy kể tên các đường thẳng đi qua 2 trong ba điểm đó. Tại sao nói chúng trùng nhau ?

2. Cho bốn điểm M, N, P, Q. Có bao nhiêu đường thẳng đi qua từng cặp hai điểm ?

3. Cho ba đường thẳng a, b, c. Số giao điểm có thể là bao nhiêu ?

4. Cho hai tia đối nhau AB và AC.

a) Gọi M là điểm thuộc tia AB. Trong ba điểm M, A, C thì điểm nào nằm giữa hai điểm còn lại ? Cũng hỏi như thế đối với ba điểm P, A, B trong đó P là điểm thuộc tia AC.

b) Trong ba điểm M, A, P thì điểm nào nằm giữa hai điểm còn lại ?

5. Trên một đường thẳng lấy ba điểm D, E, F mà độ dài DE = 4cm, EF = 23cm. Gọi I, J, K theo thứ tự là trung điểm của DE, EF và DF.

a) Có bao nhiêu tia, bao nhiêu đoạn thẳng ?

b) Chứng tỏ trung điểm của đoạn thẳng IK cũng là trung điểm của đoạn thẳng DJ.

6. Cho $\widehat{xOy} = 80^o$ và $\widehat{xOz} = 40^o$. Vẽ tia Ot nằm giữa hai tia Ox, Oy sao cho $\widehat{yOt} = 60^o$. Hỏi tia Ot là tia phân giác của góc nào ?

7. Cho tam giác DEF và điểm M nằm trong tam giác. Nối M với ba điểm của tam giác.

a) Có mấy tam giác tạo thành ?

b) Có mấy góc đỉnh M tạo thành ?

c) Những góc nào kề với góc EMF ?

8. Cho hai góc kề $\widehat{MOP} = 70^o$ và $\widehat{MOQ} = 110^o$. Hai điểm P và Q nằm trên hai nửa mặt phẳng đối nhau có bờ chung là đường thẳng OM.

a) Chứng tỏ hai góc trên là hai góc kề bù nhau và ba điểm P, O, Q thẳng hàng.

b) Vẽ tia đối OM' của tia OM, so sánh : hai góc MOQ và POM', hai góc MOP và QOM'.

9. Cho tam giác ABC có góc tù A bằng 120^o và hai cạnh AB = 5cm, AC = 4cm. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $\widehat{BAD} = 35^o$. Từ đỉnh A vẽ tia Am sao cho $\widehat{CAm} = 60^o$ cắt BC tại E.

a) Tính $\widehat{DAE}$.

b) So sánh các góc BAD, DAE và EAC.

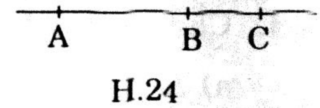
10. Cho ΔABC có BC = 4cm. Trên tia đối của tia CB lấy điểm Q sao cho CQ = 3cm.

a) Tính độ dài đoạn BQ;

b) Biết $\widehat{BAQ} = 85^\circ$, $\widehat{BAC} = 55^\circ$, tính $\widehat{CAQ}$.

C. CÁCH GIẢI VÀ LỜI BÌNH

1. Các đường thẳng đi qua 2 trong ba điểm A, B, C thẳng hàng là (hình 24) : AB (hay BA), AC (hay CA), BC (hay CB).



H.24

Các đường thẳng AB, AC phải trùng nhau vì qua 2 điểm phân biệt A, B chẳng hạn chỉ có một đường thẳng duy nhất và do C, A, B thẳng hàng nên C phải nằm trên đường thẳng AB, do đó đường thẳng AB trùng với đường thẳng AC (kí hiệu AB ≡ AC).

- ***Lời bình :*** Nói về *ba điểm thẳng hàng, câu nào đúng, câu nào sai* trong các câu sau đây :

a) Điểm K nằm giữa G, H và điểm H nằm giữa G, K;

b) Điểm H nằm giữa K, G và điểm H nằm giữa G, K;

c) Điểm G nằm giữa H, K và điểm K nằm giữa G, H;

d) Điểm K nằm giữa H, G và điểm G nằm giữa K, H;

e) Điểm G nằm giữa K, H và điểm G nằm giữa H, K.

Ta vẽ hình để dễ trả lời các câu hỏi :

a) G K H ; sai

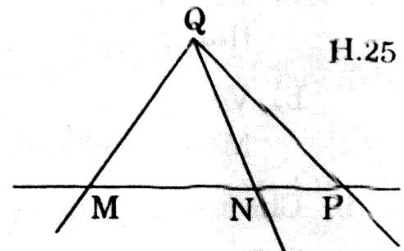
b) K H G ; đúng

c) K G H ; sai

d) H K G ; sai

e) H G K ; đúng.

2. Trước hết ta xét trường hợp ba trong bốn điểm đã cho thẳng hàng, chẳng hạn ba điểm M, N, P thẳng hàng (hình 25). Có tất cả 4 đường thẳng là : QM, QN, QP và MP.



H.25

Nếu không có ba điểm nào thẳng hàng thì có tất cả 6 đường thẳng là : MN, MP, MQ, NP, NQ và PQ.

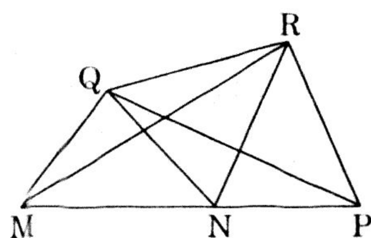
- ***Lời bình :*** *"Nếu cho 5 điểm M, N, P, Q, R thì có bao nhiêu đường thẳng đi qua từng cặp điểm ?"*

Ta xét các trường hợp sau :

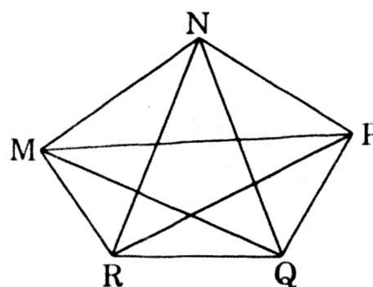
a) Nếu cả 5 điểm thẳng hàng thì rõ ràng chỉ có 1 đường thẳng.

b) Nếu chỉ có 4 điểm thẳng hàng thì có 5 đường thẳng, chẳng hạn nếu M, N, P, Q thẳng hàng thì có 5 đường thẳng sau : RM, RN, RP, RQ và MQ.

c) Nếu chỉ có ba điểm thẳng hàng, chẳng hạn M, N, P (hình 26) thì có các đường thẳng sau : QM, QN, QP, QR, RM, RN, RP và MP (8 đường thẳng).



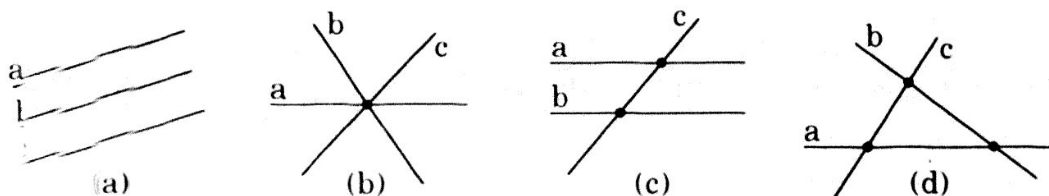
H.26



H.27

d) Nếu không có ba điểm nào thẳng hàng (hình 27) thì có các đường thẳng sau : MN, MR, NP, NQ, PQ, PR, MP, MQ, NR, NQ (tất cả 10 đường thẳng).

3. Ba đường thẳng đã cho có thể minh họa bằng các hình sau đây :



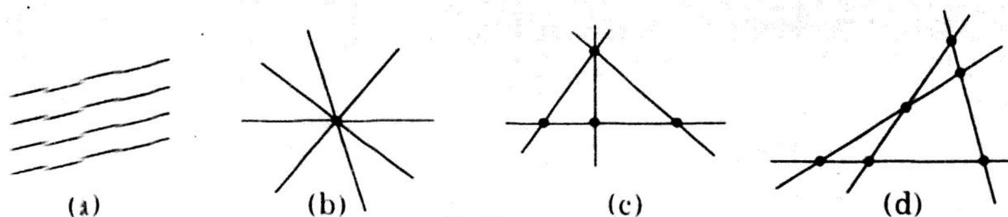
H.28

Chúng không cắt nhau mà song song với nhau (hình 28a) tức là số giao điểm là 0.

Chúng có thể có một giao điểm (hình 28b), có 2 giao điểm (hình 28c), hoặc có 3 giao điểm (hình 28d).

• ***Lời bình :*** *"Nếu cho 4 đường thẳng thì có bao nhiêu giao điểm ?"*

Ta hãy vẽ hình (hình 29) :



H.29

Chúng có thể song song với nhau : 0 giao điểm (hình 29a).

Chúng có thể có 1 giao điểm (hình 29b), có 4 giao điểm (hình 29c), hoặc có 6 giao điểm (hình 29d).

4. (Hình 30).

B A C
M P
H.30

a) Do M thuộc tia AB nên ba điểm M, A, C thẳng hàng, do đó điểm A nằm giữa M và C.

Do P thuộc tia AC nên ba điểm P, A, B thẳng hàng, do đó điểm A nằm giữa P và B.

b) Do M thuộc AB, P thuộc AC nên ba điểm M, A, P thẳng hàng, do đó điểm A nằm giữa M và P.

5. (Hình 31).

D I K E J F
M
H.31

a) Có hai tia gốc D, hai tia gốc I, hai tia gốc K, hai tia gốc E, hai tia gốc J và hai tia gốc F (tất cả 12 tia).

b) Gọi M là trung điểm của IK, ta có :

$$DM = DI + IM = \frac{DE}{2} + \frac{IK}{2} = \frac{DE + DK - DI}{2} = \frac{4 + \frac{27}{2} - 2}{2} = \frac{31}{4} \text{ (cm)}$$

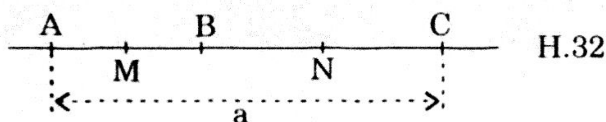
và $DJ = DE + EJ = 4 + \frac{23}{2} = \frac{31}{2}$ (cm).

Suy ra : DJ = 2.DM, tức là M cũng là trung điểm của DJ.

• ***Lời bình :*** Sau đây là một bài toán tương tự về trung điểm của một đoạn thẳng :

"Cho ba điểm A, B, C trên một đường thẳng. Gọi M là trung điểm của đoạn AB và N là trung điểm của đoạn BC. Biết AC = a, hãy tính MN theo a."

Trước hết ta vẽ hình (hình 32) :



Ta có : MN = MB + BN, mà $MB = \frac{1}{2}AB$ và $BN = \frac{1}{2}BC$ (vì M và N theo thứ tự là trung điểm của AB và BC).

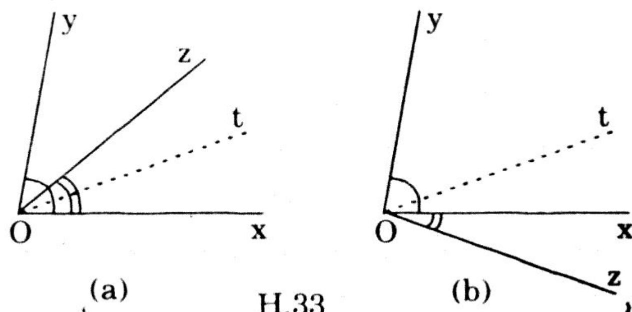
Do đó : $MN = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}BC = \frac{AB + BC}{2} = \frac{AC}{2} = \frac{a}{2}$.

6. Ta xét hai trường hợp :

a) Góc xOz có cạnh Oz nằm trong góc xOy (hình 33a).

Ta có : $\widehat{xOt} = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$.

Do $\widehat{xOz} = 40^\circ$ (gt) nên $\widehat{tOz} = 40^\circ - 20^\circ = 20^\circ$. Tia Ot lại nằm giữa hai tia Ox và Oz, do đó Ot là tia phân giác của $\widehat{xOz}$.



(a) H.33 (b)

b) Góc xOz có cạnh Oz nằm ngoài góc xOy (hình 33b).

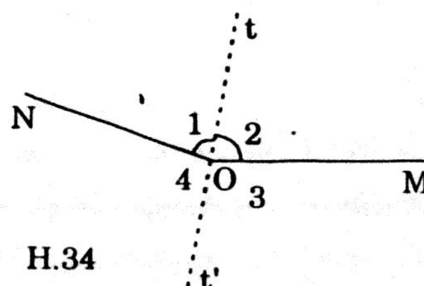
Ta có : $\widehat{yOz} = 80^\circ + 40^\circ = 120^\circ$.

Do $\widehat{yOt} = 60^\circ$ (gt) nên $\widehat{tOz} = 60^\circ$. Tia Ot lại nằm giữa hai tia Ox và Oy, do đó Ot là tia phân giác của góc yOz.

- ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán tương tự về tia phân giác :

"Cho Ot là tia phân giác của góc tù MON bằng 160° và Ot' là tia đối của Ot. Chứng tỏ rằng Ot' tạo với OM và ON hai góc bằng nhau và tìm số đo của mỗi góc đó."

Ta vẽ hình 34 :



H.34

Ta có $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = 160^\circ : 2 = 80^\circ$.

$\hat{O}_3 = 180^\circ - \hat{O}_2 = 100^\circ$;

$\hat{O}_4 = 180^\circ - \hat{O}_1 = 100^\circ$.

Vậy $\hat{O}_3 = \hat{O}_4 = 100^\circ$.

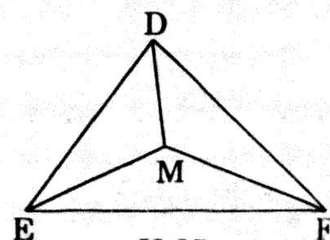
7. (Hình 35).

a) Ta có ba tam giác nhỏ tạo thành đỉnh M là :

MDE, MDF và MEF.

b) Có ba góc đỉnh M tạo thành là :

$\widehat{DME}$, $\widehat{DMF}$ và $\widehat{EMF}$.



H.35

c) Có hai góc kề với góc EMF là :

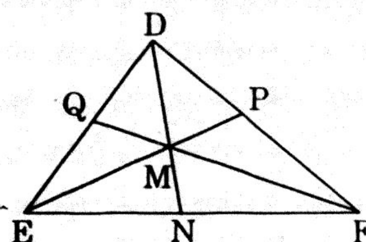
$\widehat{EMD}$ (chung cạnh ME) và $\widehat{DMF}$ (chung cạnh MF).

- ***Lời bình :*** *"Nếu các tia DM, EM và FM cắt các cạnh của ΔDEF theo thứ tự tại N, P, Q thì có bao nhiêu tam giác tạo thành ?"*

Trước hết ta có 6 tam giác (hình 36) là : MDQ, MQE, MEN, MNF, MFP và MPD.

Sau đó là 3 tam giác đôi (gồm hai tam giác không có điểm chung trong) là : MDE, MDF và MEF.

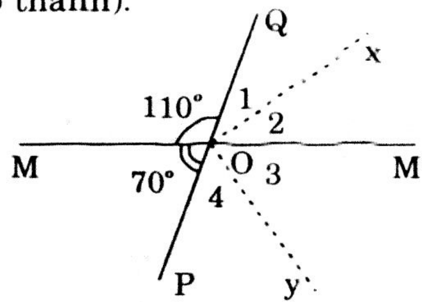
Lại có thêm 6 tam giác ba (gồm ba tam giác) là : DEN, QEF, PEF, FDN, FDQ và EDP.



H.36

Cuối cùng là ΔDEF (gồm sáu tam giác).

Vậy có tất cả 6 + 3 + 6 + 1 = 16 (tam giác tạo thành).



H.37

8. a) Hai góc kề (cạnh chung là OM) có tổng số đo là (hình 37) : $110^\circ + 70^\circ = 180^\circ$.

Vậy hai góc này là kề bù nhau. Suy ra ba điểm P, O, Q thẳng hàng.

b) Ta có : $\widehat{MOQ}$ và $\widehat{POM'}$ là hai góc tù đối đỉnh nên $\widehat{MOQ} = \widehat{POM'} = 110^\circ$.

Hai góc MOP và QOM' là hai góc nhọn đối đỉnh nên :

$$\widehat{MOP} = \widehat{QOM'} = 70^\circ.$$

• ***Lời bình :*** Có thể trả lời thêm các câu hỏi sau :

c) "Vẽ tia Ox sao cho $\widehat{xOQ} = 35^\circ$ và tia Oy sao cho $\widehat{yOP} = 55^\circ$. Tính góc xOy.

d) Những góc nào kề bù với $\widehat{yOQ}$, với $\widehat{yOM}$?

e) Nếu Ox là tia phân giác của $\widehat{QOM'}$ và Oy là tia phân giác của $\widehat{POM'}$ thì góc xOy bằng bao nhiêu ?"

Sau đây là câu trả lời :

c) $\widehat{xOM'} = \hat{O}_2 = 70^\circ - 35^\circ = 35^\circ$; $\widehat{yOM'} = \hat{O}_3 = 110^\circ - 55^\circ = 55^\circ$.

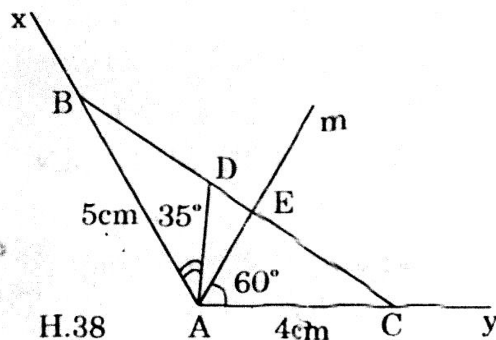
Vậy $\hat{O}_2 + \hat{O}_3 = \widehat{xOy} = 35^\circ + 55^\circ = 90^\circ$.

d) Do $\widehat{POQ}$ là góc bẹt nên góc kề bù với $\widehat{yOQ}$ là $\widehat{yOP}$. Do $\widehat{MOM}$ là góc bẹt nên góc kề bù với $\widehat{yOM}$ là $\widehat{yOM'}$.

e) Do $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = 70^\circ : 2 = 35^\circ$ và $\hat{O}_3 = \hat{O}_4 = 110^\circ : 2 = 55^\circ$.

Vậy $\widehat{xOy} = 35^\circ + 55^\circ = 90^\circ$, tức là hai tia phân giác của hai góc kề bù tạo thành một góc vuông.

9. (Hình 38).



H.38

a) Ta có : $\widehat{CAD} = \widehat{CAE} + \widehat{DAE}$

$= 120^\circ - 35^\circ = 85^\circ$

Suy ra : $\widehat{DAE} = 85^\circ - \widehat{CAE}$

$= 85^\circ - 60^\circ = 25^\circ$.

b) Do $\widehat{BAD} = 35^\circ$ (gt),

$\widehat{DAE} = 25^\circ$ (câu a) và $\widehat{EAC} = 60^\circ$ (gt) nên : $\widehat{EAC} > \widehat{BAD} > \widehat{DAE}$.

• ***Lời bình :*** Có thể trả lời thêm các câu hỏi sau :

c) "Tìm các góc kề bù với góc AEC, với góc ADC;

d) Kể tên các tam giác có trên hình vẽ;

e) Làm thế nào để vẽ ΔABC ?"

Sau đây là câu trả lời :

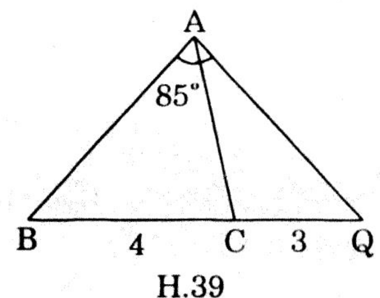
c) Hai góc AEC và AEB có đỉnh E chung và hai cạnh EC, EB cùng nằm trên một đường thẳng nên góc kề bù với góc AEC là góc AEB.

Hai góc ADC và ADB có đỉnh D chung và hai cạnh DC, DB cùng nằm trên một đường thẳng nên góc kề bù với góc ADC là góc ADB.

d) Trên hình vẽ có các tam giác sau : BDA, BEA, BCA, DEA, DCA và ECA (6 tam giác).

e) Cách vẽ như sau : Dùng thước đo độ vẽ góc xAy bằng 120°. Trên Ax đặt đoạn AB = 5cm, trên Ay đặt đoạn AC = 4cm. Nối B với C ta có ΔABC cần vẽ.

10. (Hình 39).



H.39

a) Do C nằm giữa B và Q nên :

$$BQ = BC + CQ = 4 + 3 = 7 \text{ (cm)}.$$

b) Do hai góc BAC và CAQ là hai góc kề nhau nên :

$$\widehat{BAC} + \widehat{CAQ} = \widehat{BAQ} = 85^\circ.$$

Suy ra : $\widehat{CAQ} = 85^\circ - \widehat{BAC} = 85^\circ - 55^\circ = 30^\circ$.

• ***Lời bình :*** Có thể trả lời thêm các câu hỏi :

c) "Trên BQ lấy điểm P sao cho CP = 2cm. Tính BP.

d) Các cặp góc nào kề nhau, các cặp góc nào kề bù nhau ?

e) Kể tên các tam giác có trên hình vẽ."

Sau đây là câu trả lời :

c) Do CP = 2cm nên :

– Nếu P nằm giữa B và C thì BP + PC = BC = 4cm.

Suy ra : BP = 4 – CP = 4 – 2 = 2 (cm).

– Nếu P nằm giữa C và Q thì BP = BC + CP.

Do BC = 4cm và CP = 2cm nên BP = 4 + 2 = 6 (cm).

d) Cặp góc kề nhau là : $\widehat{BAC}$ và $\widehat{CAQ}$.

Cặp góc kề bù nhau là : $\widehat{ACB}$ và $\widehat{ACQ}$.

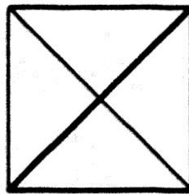
e) Trên hình vẽ có ba tam giác sau : ABQ, ACQ và ABC.

D. ĐỐ BẠN GIẢI ĐƯỢC

1. Ô chữ số sau đây có những điều gì lạ ?

1	7	6
2	8	3
4	5	9

2. Từ hình vuông với hai đường chéo, hãy bỏ bớt một số nét để có được mười chữ số từ 0; 1; ...; 9 (ví dụ số 2 là Z với nét đậm).



§9. XUNG QUANH CÁC ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VÀ ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

1. Đường thẳng vuông góc

a) Hai góc đối đỉnh là hai góc mà mỗi cạnh của góc này là tia đối của một cạnh của góc kia.

b) Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau.

c) Hai đường thẳng cắt nhau và trong các góc tạo thành có một góc vuông được gọi là hai đường thẳng vuông góc.

d) Đường thẳng vuông góc với một đoạn thẳng tại trung điểm của nó được gọi là đường trung trực của đoạn thẳng ấy.

2. Đường thẳng song song

a) Tiên đề Ơclit : Qua một điểm ở ngoài một đường thẳng chỉ có một đường thẳng song song với đường thẳng đó.

b) Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song thì :

- hai góc so le trong bằng nhau;
- hai góc đồng vị bằng nhau;
- hai góc trong cùng phía bù nhau.

c) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.

d) Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.

3. Tổng ba góc của một tam giác

a) Tổng ba góc của một tam giác bằng 180^o.

b) Trong một tam giác vuông, hai góc nhọn phụ nhau.

c) Mỗi góc ngoài của một tam giác bằng tổng của hai góc trong không kề với nó.

B. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

1. Câu nào đúng, câu nào sai ?

a) Hai góc bằng nhau thì đối đỉnh.

b) Đường thẳng vuông góc với một đoạn thẳng là đường trung trực của đoạn thẳng đó.

c) Hai đường thẳng cắt nhau thì vuông góc.

d) Nếu một đường thẳng m cắt hai đường thẳng p và q mà tạo thành hai góc đồng vị bằng nhau thì hai góc so le trong bằng nhau.

e) Qua một điểm M ở ngoài một đường thẳng a có một đường thẳng song song với a.

2. Cho ba đường thẳng AB, CD, EF cùng đi qua một điểm M. Hãy nêu tên các cặp góc bằng nhau.

3. Cho tam giác ABC vuông tại A. Kẻ đường cao AH, những cặp góc nào có cạnh tương ứng vuông góc ?

4. Cho bốn đường thẳng AB, CD, EF, GH cùng đi qua điểm O.

a) Có bao nhiêu góc tạo thành ?

b) Có bao nhiêu cặp góc bẹt đối đỉnh ?

c) Có bao nhiêu cặp góc đối đỉnh nhỏ hơn góc bẹt ?

5. Cho góc tù xOy. Ở miền ngoài của góc ta kẻ $Oz \perp Ox$, $Ot \perp Oy$. Chứng minh rằng :

a) $\widehat{xOt} = \widehat{yOz}$.

b) Hai góc xOy và zOt bù nhau.

c) Gọi Om là tia phân giác của $\widehat{xOy}$ và On là tia phân giác của $\widehat{zOt}$, có nhận xét gì về hai tia Om và On ?

6. Cho hai đường thẳng xx' và yy' vuông góc tại O. Kẻ tia phân giác OM của góc x'Oy và tia phân giác ON của góc xOy'.

a) Chứng minh rằng : OM và ON là hai tia đối nhau, hai góc x'OM và y'ON bằng nhau.

b) Tính các góc MOx và NOx'.

7. Trong mặt phẳng ba đường thẳng phân biệt a, b, c có thể chia mặt phẳng thành bao nhiêu miền ? (Xét các trường hợp : ba đường thẳng song song, hai đường thẳng song song cắt bởi đường thẳng thứ ba, ba đường thẳng cắt nhau tại một điểm, ba đường thẳng cắt nhau từng đôi một tại các điểm khác nhau).

8. Cho góc xOy bằng 48°. Từ điểm A trên cạnh Ox ta vẽ tia Am // Oy nằm ở miền ngoài góc.

a) Tính số đo góc OAm.

b) Kẻ tia phân giác On của góc xOy và tia phân giác Ap của góc OAm, chứng minh On // Ap.

c) Những góc nhọn nào có cạnh tương ứng song song ?

9. Chứng minh rằng : Nếu hai góc có cạnh tương ứng vuông góc thì :

a) Chúng bằng nhau nếu cả hai góc đều nhọn hoặc đều tù.

b) Chúng bù nhau nếu góc này nhọn, góc kia tù.

10. Cho tam giác ABC và phân giác BP. Qua A vẽ tia Ax // Bp.

a) Chứng minh rằng Ax cắt đường thẳng BC.

b) Gọi O là giao điểm của Ax và BC, chứng minh : $\widehat{OAB} = \widehat{AOC}$.

c) Vẽ phân giác By của $\widehat{ABO}$, chứng minh By ⊥ AO.

d) Biết $\widehat{A} = 60^\circ$, $\widehat{C} = 50^\circ$, tính $\widehat{ABP}$ và $\widehat{BPC}$.

11. Cho hai đường thẳng song song xy và zt và điểm M trên xy, điểm N trên zt. Gọi P là một điểm bất kì thuộc phần trong của xy và zt. Nối PM và PN. Chứng minh rằng : $\widehat{MPN} = \widehat{xMP} + \widehat{zNP}$.

12. Cho tam giác ABC và hai phân giác BE, CF cắt nhau tại I. Từ A vẽ các đường thẳng song song với BE và CF cắt đường thẳng BC theo thứ tự tại M và N. Chứng minh rằng : $\widehat{MAN} = 90^\circ + \dfrac{\widehat{A}}{2}$.

13. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên tia đối của tia AB lấy AD = AB.

a) Chứng minh DC ⊥ BC.

b) Kẻ phân giác AE của góc DAC, chứng minh AE // BC và suy ra AE ⊥ DC.

14. Trong tam giác ABC cân tại C, kẻ trung tuyến CM và phân giác AD. Tính góc C biết AD = 2.CM.

15. Cho tam giác ABC cân tại A có góc ở đỉnh A bằng 20°. Trên hai cạnh AB và AC lấy hai điểm D và E sao cho $\widehat{CBE} = 50^\circ$, $\widehat{BCD} = 60^\circ$. Chứng minh $\widehat{CDE} = 30^\circ$.

C. CÁCH GIẢI VÀ LỜI BÌNH

1. a) Sai, chẳng hạn hai góc vuông luôn bằng nhau nhưng có thể không đối đỉnh.

b) Sai, phải thêm "vuông góc tại trung điểm của nó".

c) Sai, hai đường thẳng cắt nhau có thể không vuông góc (nhưng hai đường thẳng vuông góc thì cắt nhau).

d) Đúng.

e) Sai, phải thêm "chỉ có" hoặc "có một đường thẳng duy nhất".

• ***Lời bình :*** *Câu nào đúng, câu nào sai ?*

a) Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

b) Hai đường thẳng m và n cùng song song với đường thẳng p thì m // n.

c) Tam giác nhọn là tam giác có ba góc nhọn, tam giác tù là tam giác có một góc tù.

d) Hai đường thẳng song song là hai đường thẳng không có điểm chung.

e) M là trung điểm của đoạn thẳng AB nếu M cách đều hai đầu mút A và B.

Trả lời :

a) Sai, phải thêm "hai đường thẳng phân biệt".

b) Sai, phải thêm "hai đường thẳng phân biệt".

c) Đúng.

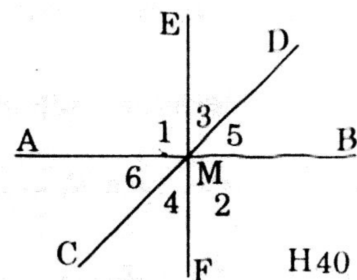
d) Sai, phải thêm "cùng nằm trong một mặt phẳng".

e) Sai, phải thêm "nằm giữa A và B".

2. Ba đường thẳng AB, CD và EF cùng đi qua điểm M (hình 40) tạo thành :

a) 3 cặp góc đối đỉnh bằng nhau :

$\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$; $\widehat{M}_3 = \widehat{M}_4$; $\widehat{M}_5 = \widehat{M}_6$.



H40

b) 3 cặp góc bằng nhau :

$\widehat{M}_1 + \widehat{M}_3 = \widehat{AMD} = \widehat{M}_2 + \widehat{M}_4 = \widehat{CMB}$

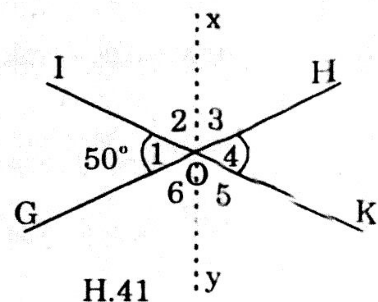
$\widehat{M}_3 + \widehat{M}_5 = \widehat{EMB} = \widehat{M}_4 + \widehat{M}_6 = \widehat{AMF}$

$\widehat{M}_5 + \widehat{M}_2 = \widehat{DMF} = \widehat{M}_1 + \widehat{M}_6 = \widehat{EMC}$.

c) 3 cặp góc bẹt bằng nhau : cặp góc bẹt AMB, cặp góc bẹt CMD và cặp góc bẹt EMF. Tất cả có 9 cặp góc bằng nhau.

• ***Lời bình :*** Tương tự, *"nếu hai đường thẳng GH và IK cắt nhau tại O sao cho $\widehat{GOI} = 50^o$ và các tia Ox, Oy lần lượt là tia phân giác của góc IOH và góc GOK, hãy tính tất cả các cặp góc bằng nhau tạo thành"*

Ta vẽ hình và đánh số các góc để trình bày lời giải cho gọn (hình 41).



H.41

Ta có ngay $\hat{O}_1 = \hat{O}_4 = 50^o$ (cặp góc đối đỉnh thì bằng nhau). Vì $\widehat{IOH}$ kề bù với $\hat{O}_1$ nên :

$\widehat{IOH} = 180^o - 50^o = 130^o$.

Từ đó : $\hat{O}_2 = \hat{O}_3 = 130^o : 2 = 65^o$.

Do $\widehat{IOH}$ và $\widehat{GOK}$ là hai góc đối đỉnh nên $\widehat{GOH} = 130^o$, từ đó :

$\hat{O}_5 = \hat{O}_6 = 130^o : 2 = 65^o$.

* Xét thêm : do hai tia Ox và Oy đối nhau nên ta có thêm các góc đối đỉnh bằng nhau : $\widehat{O}_2 = \widehat{O}_5 = 65^\circ$, $\widehat{O}_3 = \widehat{O}_6 = 65^\circ$.

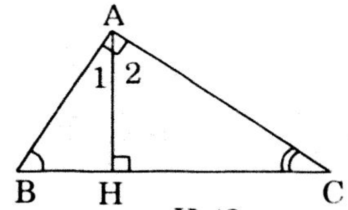
Ngoài ra lại có : $\widehat{GOx} = \widehat{HOy} = 50^\circ + 65^\circ = 115^\circ$;

$\widehat{IOH} = \widehat{GOK} = 65^\circ + 65^\circ = 130^\circ$;

$\widehat{xOK} = \widehat{yOI} = 65^\circ + 50^\circ = 115^\circ$;

cùng với 6 cặp góc bẹt tại O.

3. Hai góc có cạnh tương ứng vuông góc khi mỗi cạnh của góc này vuông góc với một cạnh của góc kia. Ta có (hình 42) :



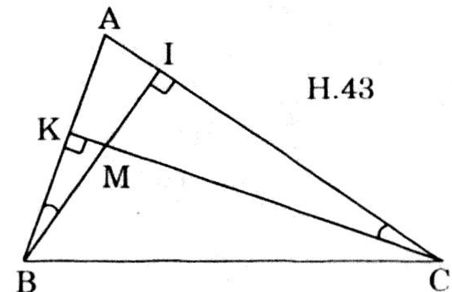
H.42

a) $\widehat{B}$ và $\widehat{A}_2$ là hai góc có cạnh tương ứng vuông góc (vì AC ⊥ BA và AH ⊥ BH).

b) $\widehat{A}_1$ và $\widehat{C}$ cũng là hai góc có cạnh tương ứng vuông góc (vì AH ⊥ CH và AB ⊥ CA).

• ***Lời bình :*** *"Nếu tam giác ABC nhọn và BI, CK là hai đường cao cắt nhau tại M thì những cặp góc nào có cạnh tương ứng vuông góc ?"*

Ta cũng có hai cặp góc có cạnh tương ứng vuông góc như ở trên (hình 43) :



H.43

$\widehat{MBK}$ và $\widehat{MCI}$ (vì BK ⊥ CK và BI ⊥ CI)

$\widehat{IAK}$ và $\widehat{IMK}$ (vì AI ⊥ MI và AK ⊥ MK)

Lưu ý thêm là tại M ta có hai cặp góc đối đỉnh bằng nhau :

$\widehat{BMC} = \widehat{KMI}$ và $\widehat{KMB} = \widehat{IMC}$.

4. a) Do có 4 đường thẳng cùng đi qua O nên có 8 tia chung gốc O. Mỗi tia tạo với 7 tia còn lại 7 góc nên 8 tia tạo với các tia còn lại 7.8 = 56 (góc). Mỗi góc tạo thành được tính hai lần nên có tất cả 56 : 2 = 28 (góc).

b) Với 4 đường thẳng ta có 4 góc bẹt, tức là 2 cặp góc bẹt đối đỉnh.

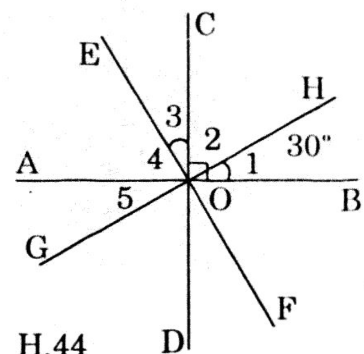
c) Số góc còn lại nhỏ hơn góc bẹt là 28 – 4 = 24, mà mỗi góc này có một góc đối đỉnh với nó nên có cả thảy 24 : 2 = 12 (cặp góc đối đỉnh).

• ***Lời bình :*** *"Nếu bốn đường thẳng trên mà AB vuông góc với CD, EF vuông góc với GH và góc HOB nhọn, hãy :*

a) Chứng minh $\widehat{HOB} = \widehat{EOC}$.

b) Tính $\widehat{GOC}$ biết $\widehat{HOB} = 30^\circ$."

Cách giải như sau (hình 44) :



H.44

a) Gọi $\widehat{HOB} = \hat{O}_1$ và đánh số các góc như ở hình vẽ, ta có :

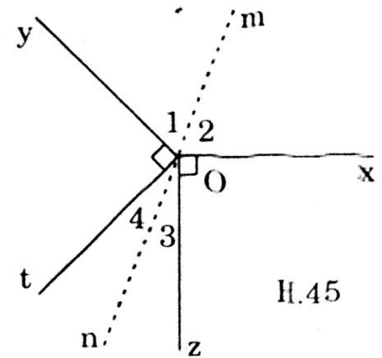
$$\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = \widehat{BOC} = 90^\circ ; \quad \hat{O}_3 + \hat{O}_2 = \widehat{EOH} = 90^\circ.$$

Suy ra : $\hat{O}_1 = \hat{O}_3$, tức là $\widehat{HOB} = \widehat{EOC}$.

b) Ta có : $\hat{O}_1 = \hat{O}_5$ (đối đỉnh)

mà $\widehat{GOC} = \widehat{GOE} + \hat{O}_3 = 90^\circ + \hat{O}_3 = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$.

5. a) Ta có (hình 45) :



H.45

$\widehat{xOt} = \widehat{xOz} + \widehat{zOt} = 90^\circ + \widehat{zOt}$ (1)

$\widehat{yOz} = \widehat{yOt} + \widehat{zOt} = 90^\circ + \widehat{zOt}$ (2)

Từ (1) và (2) có : $\widehat{xOt} = \widehat{yOz}$.

b) Bốn góc đỉnh O có tổng bằng 360° mà $\widehat{yOt} = 90^\circ$, $\widehat{xOz} = 90^\circ$ (gt) nên

$$\widehat{xOy} + \widehat{zOt} = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 180^\circ$$

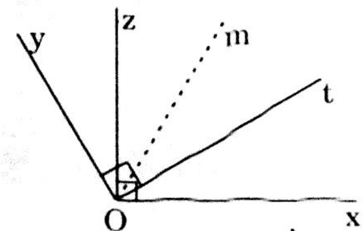
tức là hai góc xOy và zOt bù nhau.

c) Ta có : $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ (vì Om là tia phân giác), $\hat{O}_3 = \hat{O}_4$ (vì On là tia phân giác), mà hai góc xOy và zOt bù nhau nên :

$$\hat{O}_1 + 90^\circ + \hat{O}_4 = \hat{O}_2 + 90^\circ + \hat{O}_3 = 180^\circ.$$

Suy ra hai tia Om và On là hai tia đối nhau nên mOn là đường thẳng, tức là $\widehat{mOn}$ là một góc bẹt.

• ***Lời bình :*** Nếu ở miền trong của góc tù xOy ta kẻ Oz ⊥ Ox, Ot ⊥ Oy như ở trên (hình 46) thì ta cũng có : $\widehat{xOt} = \widehat{yOz}$ (vì cùng bằng $90^\circ - \widehat{zOt}$) và hai góc xOy và zOt bù nhau



H.46

(vì bằng $(\widehat{xOz} + \widehat{zOy}) + \widehat{zOt} = \widehat{xOz} + (\widehat{zOy} + \widehat{zOt})$

$= \widehat{xOz} + \widehat{yOt} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$).

Ngoài ra có thể nhận xét thêm :

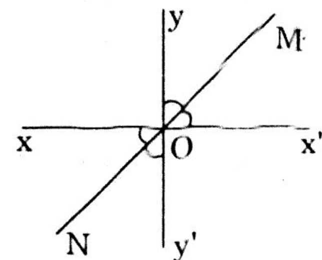
d) Hai góc xOy và yOz là hai góc có cạnh tương ứng vuông góc.

e) Tia phân giác Om của góc zOt cũng là tia phân giác của góc xOy.

6. a) Hai đường thẳng x'x' và yy' vuông góc tại O nên bốn góc tạo thành đều là góc vuông (hình 47).

Vì OM và ON theo thứ tự là tia phân giác của các góc vuông yOx' và xOy' nên

$$\widehat{MOy} = \widehat{NOx} = 90^\circ : 2 = 45^\circ.$$



H.47

Suy ra $\widehat{NOM} = 45^o + 90^o + 45^o = 180^o$.

Vậy OM và ON là hai tia đối nhau. Ta cũng có ngay

$$\widehat{x'OM} = \widehat{yON} = 45^o.$$

b) Ta có : $\widehat{MOx} = 90^o + 45^o = 135^o$ và $\widehat{NOx'} = 45^o + 90^o = 135^o$.

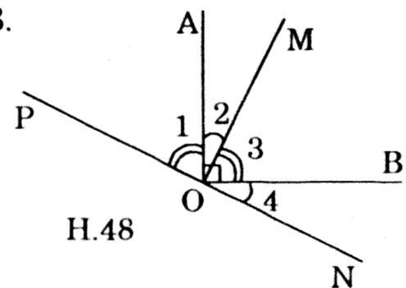
- ***Lời bình :*** **Xét thêm bài** toán sau về tia đối nhau :

"Cho góc vuông AOB và tia OM nằm trong góc. Vẽ tia ON ở phía ngoài góc vuông tạo thành $\widehat{BON} = \widehat{AOM}$ và tia OP tạo thành $\widehat{AOP} = \widehat{MOB}$. Chứng minh rằng ON và OP là hai tia đối nhau và OM ⊥ PN."

Cách giải như sau (hình 48) :

Để cho gọn ta đánh số các góc như ở hình vẽ. Ta có :

$$\hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_4 = 2(\hat{O}_2 + \hat{O}_3) = 2\widehat{AOB}.$$



H.48

Suy ra : $\widehat{PON} = 2.90^o = 180^o$.

Vậy ON và OP là hai tia đối nhau.

Ta lại có : $\widehat{NOM} = \hat{O}_4 + \hat{O}_3 = \frac{1}{2}\widehat{NOP}$

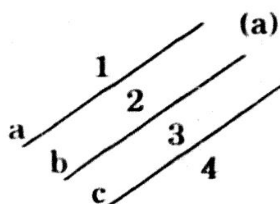
Suy ra $\widehat{NOM} = 180^o : 2 = 90^o$, tức là OM ⊥ ON hay OM ⊥ PN.

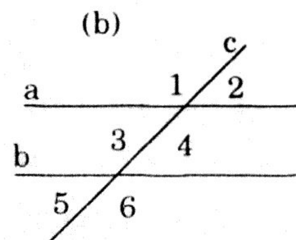
- Có thể hỏi thêm : *"Những cặp góc nào có cạnh tương ứng vuông góc"*.

Rõ ràng đó là các cặp góc $\hat{O}_1$ và $\hat{O}_3$, $\hat{O}_2$ và $\hat{O}_4$ và $\hat{O}_1 = \hat{O}_3$, $\hat{O}_2 = \hat{O}_4$.

7. Theo đề bài, ta có hình vẽ đối với 4 trường hợp có thể xảy ra như sau :

a) Trường hợp a // b // c (hình 49a) : mặt phẳng được chia thành 4 miền.

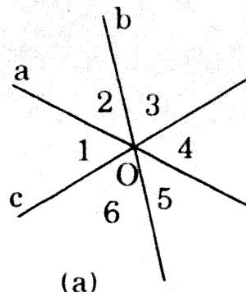


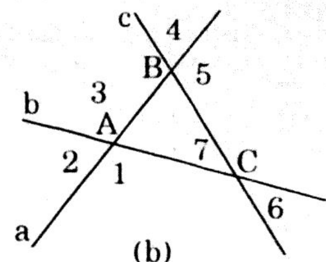


H.49

b) Trường hợp a // b bị cắt bởi c (hình 49b) : mặt phẳng được chia thành 6 miền.

c) Trường hợp a, b, c cắt nhau tại O (hình 50a) : mặt phẳng được chia thành 6 miền.



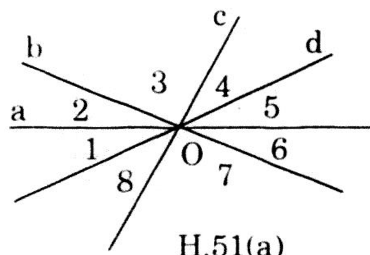


H.50

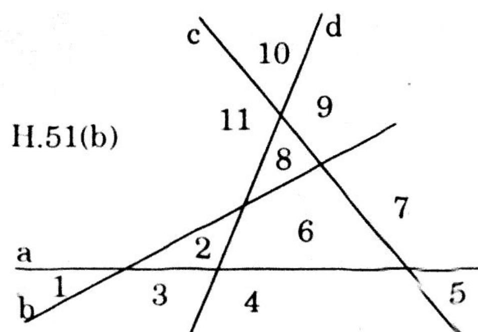
d) Trường hợp a, b, c cắt nhau từng đôi một tại A, B, C (hình 50b) : mặt phẳng được chia thành 7 miền.

• ***Lời bình :*** Tương tự, *"Nếu có 4 đường thẳng phân biệt a, b, c, d cắt nhau tại một điểm O và cắt nhau từng đôi một thì mặt phẳng được chia thành bao nhiêu miền ?"*

Ta có các hình vẽ sau :



H.51(a)



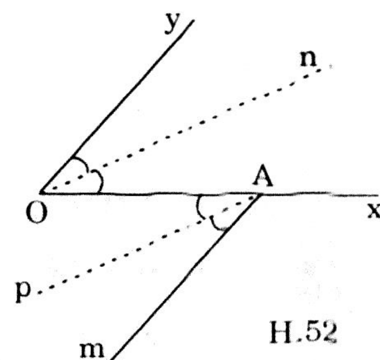
H.51(b)

a) Trường hợp a, b, c, d cắt nhau tại O (hình 51a) : mặt phẳng được chia thành 8 miền.

b) Trường hợp a, b, c, d cắt nhau từng đôi một (hình 51b) : mặt phẳng được chia thành 11 miền.

8. a) Ta có (hình 52) : Am // Oy (gt) nên

$$\widehat{AOy} = \widehat{OAm} = 48^\circ \text{ (góc so le trong).}$$



H.52

b) Vì On là tia phân giác của $\widehat{xOy}$ nên

$$\widehat{nOx} = \frac{1}{2}\widehat{xOy} = 24^\circ.$$

Tương tự, vì Ap là tia phân giác của $\widehat{OAm}$ nên

$$\widehat{OAp} = \frac{1}{2}\widehat{OAm} = 24^\circ.$$

Hai góc này ở vị trí góc so le trong mà bằng nhau nên On // Ap.

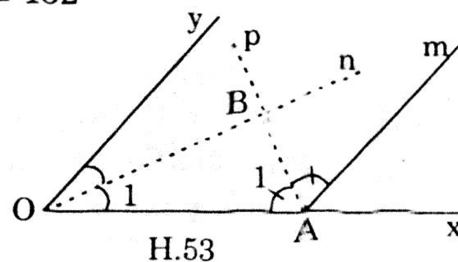
c) Hai góc yOn và pAm là hai góc nhọn có cạnh tương ứng song song (Oy // Am, On // Ap) và bằng nhau.

• ***Lời bình :*** *Nếu ta vẽ tia Am // Oy nằm trong góc xOy thì các kết quả trên còn đúng nữa không ?* (hình 53).

a) Ta có : $\widehat{OAm} = 180^\circ - \widehat{AOy} = 180^\circ - 48^\circ = 132^\circ$

(hai góc trong cùng phía).

b) Ta có : $\hat{O}_1 = \frac{1}{2}\widehat{yOA} = 48^\circ : 2 = 24^\circ$,



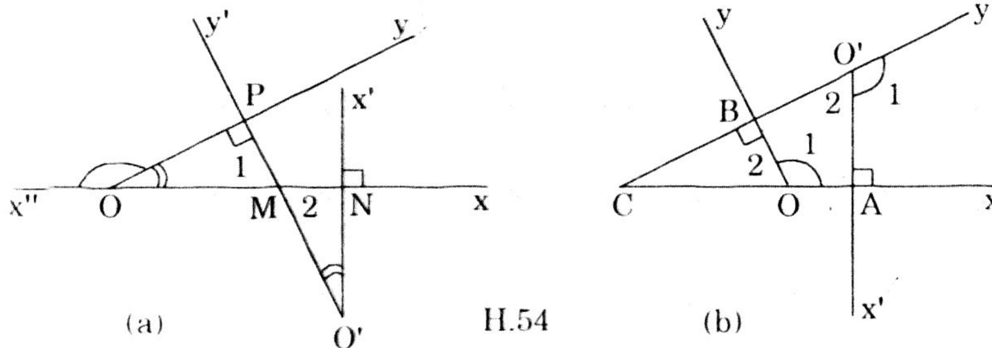
H.53

$$\hat{A}_1 = \frac{1}{2}\widehat{OAm} = 132^\circ : 2 = 66^\circ.$$

Suy ra $\widehat{OBA} = 180^\circ - (66^\circ + 24^\circ) = 90^\circ$, tức là On ⊥ Ap.

c) Hai góc nhọn yOx và mAx là hai góc có cạnh tương ứng song song (Oy // Am, Ox và Ax trùng nhau). Chúng bằng nhau vì là hai góc đồng vị.

9. a) *Trường hợp hai góc đều nhọn* (hình 54a).



Trước hết ta chứng minh O'y' phải cắt Ox tại M. Thật vậy, nếu O'y' // Ox thì theo giả thiết O'x' ⊥ Ox, suy ra O'x' ⊥ O'y', trái với giả thiết là $\widehat{x'O'y'}$ không vuông, do đó O'y' phải cắt Ox tại M.

Xét hai tam giác vuông OPM và O'NM đã có $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$ (đối đỉnh) nên $\widehat{O} = \widehat{O'}$. Vậy $\widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}$.

Trường hợp hai góc đều tù (hình 54b).

Trong tam giác vuông O'AC ta có : $\widehat{O'_2} + \widehat{C} = 90^o$ (1)

Trong tam giác vuông OBC ta có : $\widehat{O}_2 + \widehat{C} = 90^o$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{O'_2} = \widehat{O}_2$ (3)

Do $\widehat{O'_2}$ kề bù với $\widehat{O'_1}$ và $\widehat{O}_2$ kề bù với $\widehat{O}_1$ nên theo (3) ta có :

$\widehat{O}_1 = \widehat{O'_1}$, tức là $\widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}$.

b) *Trường hợp góc này nhọn, góc kia tù*

Ta có (hình 54a) : $\widehat{x''Oy} + \widehat{xOy} = 180^o$, mà $\widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}$

nên $\widehat{x''Oy} + \widehat{x'O'y'} = 180^o$.

• ***Lời bình :*** Ta chứng minh thêm rằng :

"Nếu hai góc có cạnh tương ứng song song thì :

a) Chúng bằng nhau nếu cả hai góc đều nhọn hoặc đều tù.

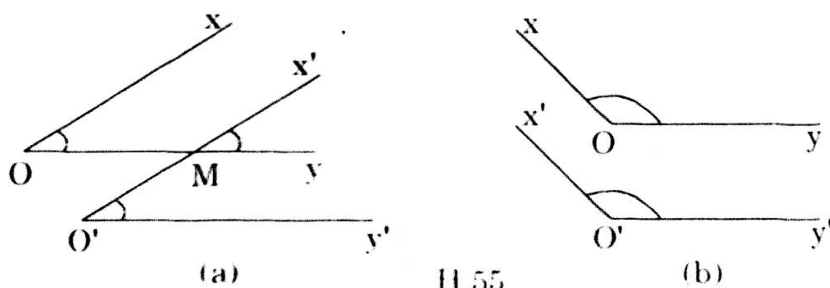
b) Chúng bù nhau nếu góc này nhọn, góc kia tù."

Xét các hình vẽ sau :

a) Trường hợp hai góc đều nhọn (hình 55a)

Vì Oy // O'y' (gt) mà O'x' cắt O'y' nên O'x' phải cắt Oy tại M.

Xét Oy // O'y' và cát tuyến O'M ta có : $\widehat{M} = \widehat{O'}$ (góc đồng vị)



H.55

Xét Ox // O'x' và cát tuyến OM ta có : $\hat{M} = \hat{O}$ (góc đồng vị).

Suy ra $\hat{O} = \hat{O'}$, tức là $\widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}$.

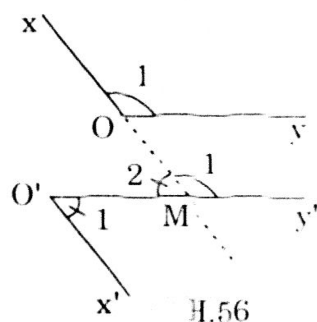
Với trường hợp hai góc $\widehat{xOy}$ và $\widehat{x'O'y'}$ đều tù, cách chứng minh cũng tương tự (hình 55b).

b) Trường hợp góc này nhọn, góc kia tù (hình 56).

Vì Oy // O'y' (gt) mà Ox cắt Oy thì Ox phải cắt O'y' tại M.

Xét Oy // O'y' và cát tuyến OM ta có :

$\hat{O}_1 = \hat{M}_1$ (góc đồng vị)



H.56

Xét Ox // O'x' và cát tuyến O'M ta có :

$\hat{O'}_1 = \hat{M}_2$ (góc so le trong)

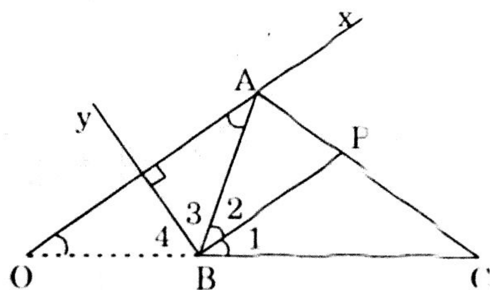
Do $\hat{M}_1 + \hat{M}_2 = 180^o$ nên $\hat{M}_1 + \hat{O'}_1 = 180^o$

hay $\hat{O}_1 + \hat{O'}_1 = 180^o$, tức là $\widehat{xOy} + \widehat{x'O'y'} = 180^o$.

10. (Hình 57)

a) Ta có Ax // BP. Do BC cắt BP tại B nên BC phải cắt Ax (theo hệ quả của tiên đề Ơclit).

b) Ax // BP và cát tuyến AB nên ta có $\widehat{OAB} = \hat{B}_2$ (so le trong), $\widehat{AOC} = \hat{B}_1$ (đồng vị).



H.57

Nhưng $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ (gt) nên $\widehat{OAB} = \widehat{AOC}$.

c) $\widehat{OBA}$ và $\widehat{ABC}$ là hai góc kề bù nên $\widehat{OAB} + \widehat{ABC} = 180^o$,

hay $\hat{B}_4 + \hat{B}_3 + \hat{B}_2 + \hat{B}_1 = 2\hat{B}_3 + 2\hat{B}_2 = 2(\hat{B}_3 + \hat{B}_2) = 180^o$.

Suy ra $\widehat{PBy} = \hat{B}_2 + \hat{B}_3 = 90^o$, tức là By ⊥ BP.

Ta lại có Ax // BP mà By ⊥ BP, suy ra By ⊥ Ax. Vậy By ⊥ AO.

d) Trong tam giác ABC ta có $\widehat{ABC} = 180^o - (60^o + 50^o) = 70^o$;

$$\widehat{ABP} = \frac{1}{2}\widehat{ABC} = 70^o : 2 = 35^o.$$

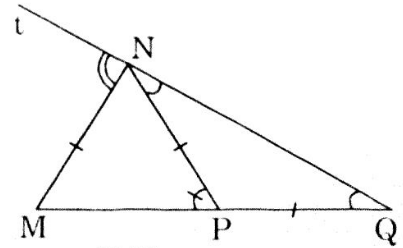
$\widehat{BPC}$ là góc ngoài của ΔBPA nên $\widehat{BPC} = \hat{A} + \hat{B}_2 = 60^o + 35^o = 95^o$

• ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau :

"Cho tam giác MNP cân tại N. Kéo dài MP một đoạn PQ = PN. Gọi Nt là tia đối của tia NQ.

a) Chứng minh $\widehat{MNt} = 3\widehat{PNQ}$.

b) Biết $\widehat{M} = 58^o$, tính $\widehat{N}$ và $\widehat{PNQ}$."



H.58

Cách giải như sau (hình 58)

a) Góc P là góc ngoài của ΔNPQ nên

$$\widehat{P} = \widehat{Q} + \widehat{PNQ}$$

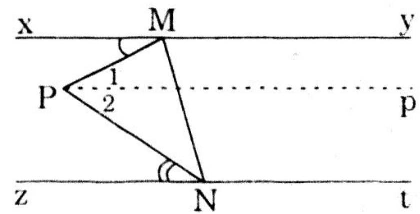
Lại có $\widehat{MNt} = \widehat{M} + \widehat{Q} = \widehat{P} + \widehat{Q} = 2\widehat{PNQ} + \widehat{PNQ}$, hay $\widehat{MNt} = 3\widehat{PNQ}$.

b) Ta có : $\widehat{PNQ} = \dfrac{\widehat{P}}{2} = \dfrac{\widehat{M}}{2}$, suy ra $\widehat{PNQ} = 58^o : 2 = 29^o$.

Từ đó $\widehat{N} = 180^o - 2\widehat{M} = 64^o$.

11. Ta xét hai trường hợp hình vẽ tùy theo vị trí của P nằm bên trái hoặc bên phải của đoạn MN.

a) P nằm bên trái đoạn MN (hình 59).



H.59

Qua P ta kẻ Pp song song với xy và zt.

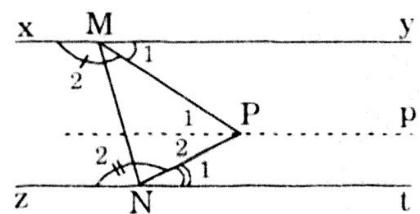
Ta có ngay : $\widehat{M} = \widehat{P}_1$ (so le trong),

$\widehat{N} = \widehat{P}_2$ (so le trong).

Cộng từng vế hai đẳng thức này ta được :

$\widehat{M} + \widehat{N} = \widehat{P}_1 + \widehat{P}_2$ hay $\widehat{xMP} + \widehat{zNP} = \widehat{MPN}$.

b) P nằm bên phải đoạn MN (hình 60).



H.60

Lần này ta gọi $\widehat{xMP}$ là $\widehat{M}_2$, $\widehat{zNP}$ là $\widehat{N}_2$ thì sẽ có :

$\widehat{M}_2 + \widehat{P}_1 = 180^o$ (hai góc trong cùng phía)

$\widehat{N}_2 + \widehat{P}_2 = 180^o$ (hai góc trong cùng phía)

mà $\widehat{P}_1 = \widehat{M}_1$, $\widehat{P}_2 = \widehat{N}_1$ (góc so le trong) nên ta có hệ thức sau :

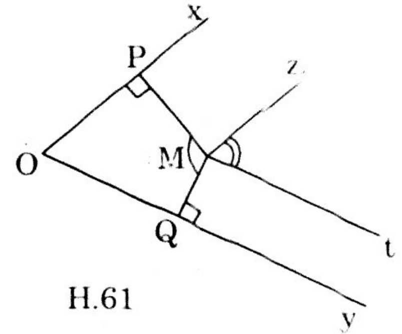
$$\widehat{M}_2 + \widehat{N}_2 + \widehat{M}_1 + \widehat{N}_1 = 180^o + 180^o = 360^o$$

hay $\widehat{xMP} + \widehat{zNP} = 360^o - \widehat{MPN}$.

• ***Lời bình :*** Nếu bài ra như sau :

"Cho điểm M nằm trong góc nhọn xOy. Từ M ta kẻ MP ⊥ Ox, MQ ⊥ Oy rồi kẻ Mz // Ox, Mt // Oy. Chứng minh rằng hai góc $\widehat{zMt}$ và $\widehat{PMQ}$ bù nhau", thì ta có cách giải sau đây :

Xét hai góc xOy nhọn và PMQ tù (hình 61) có cạnh tương ứng vuông góc ($MP \perp Ox$, $MQ \perp Oy$) nên $\widehat{xOy} + \widehat{PMQ} = 180^\circ$ (1)



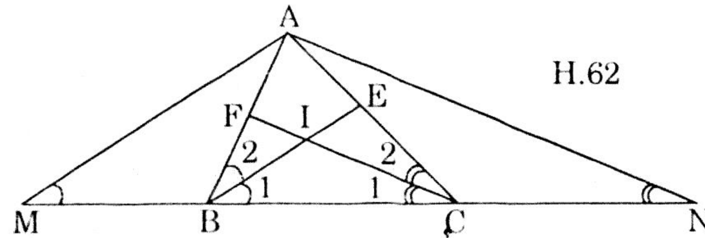
H.61

Lại xét hai góc nhọn xOy và zMt có cạnh tương ứng song song (Mz // Ox, Mt // Oy) nên

$$\widehat{xOy} = \widehat{zMt} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $\widehat{zMt} + \widehat{PMQ} = 180^\circ$.

12. (Hình 62)



H.62

Ta có : AM // BE (gt), suy ra $\widehat{M} = \widehat{B}_1$ (đồng vị);

AN // CF (gt), suy ra $\widehat{N} = \widehat{C}_1$ (đồng vị).

Xét ΔAMN có $\widehat{MAN} = 180^\circ - (\widehat{M} + \widehat{N}) = 180^\circ - (\widehat{B}_1 + \widehat{C}_1)$,

mà $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$ và $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$ (gt) nên

$$\widehat{MAN} = 180^\circ - \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2} = 180^\circ - \frac{180^\circ - \widehat{BAC}}{2}$$

$$= 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2}\right) = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}.$$

• ***Lời bình :***

a) Ta có thể dùng định lí về góc có cạnh tương ứng song song để được $\widehat{MAN} = \widehat{BIC}$. Tiếp tục chứng minh tương tự như trên sẽ có

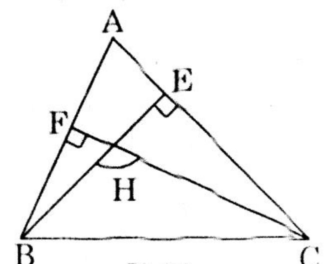
$$\widehat{BIC} = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}.$$

b) Bài toán trên có thể thay hai phân giác bằng hai đường cao như sau :

"Cho tam giác ABC và hai đường cao BE, CF cắt nhau tại H.

α) Chứng minh $\widehat{ABE} = \widehat{ACF}$.

β) Cho $\widehat{B} = 65^\circ$, $\widehat{C} = 45^\circ$, tính góc BHC."



H.63

Ta có cách giải sau đây (hình 63).

α) $\widehat{ABE} = \widehat{ACF}$ vì là góc có cạnh tương ứng vuông góc ($BE \perp AC$, $AB \perp CF$).

β) Tổng ba góc của ΔABC bằng 180^o mà $\hat{B} = 65^o$, $\hat{C} = 45^o$ nên

$$\hat{A} = 180^o - (\hat{B} + \hat{C}) = 180^o - 110^o = 70^o.$$

Do $\widehat{ABE} + \hat{A} = 90^o$ nên $\widehat{ABE} = 20^o$, suy ra $\widehat{HBC} = 45^o$.

Do $\widehat{ACF} + \hat{A} = 90^o$ nên $\widehat{ACF} = 20^o$, suy ra $\widehat{HCB} = 25^o$.

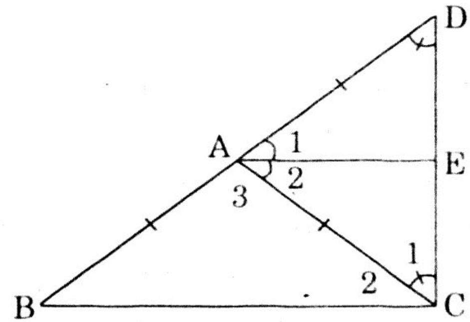
Xét ΔBHC ta có ngay :

$$\widehat{BHC} = 180^o - (\widehat{HBC} + \widehat{HCB}) = 180^o - 70^o = 110^o.$$

13. a) Góc A_3 là góc ngoài của ΔADC (hình 64) nên $\hat{A}_3 = \hat{D} + \hat{C}_1$.

Vì AD = AB và AB = AC (gt) nên AD = AC, tức là ΔADC cân, suy ra

$\hat{D} = \hat{C}_1$, do đó $\hat{A}_3 = 2\hat{C}_1$ (1).



H.64

Trong tam giác DBC tổng ba góc bằng 180^o, tức là

$\hat{B} + \hat{C}_2 + \hat{C}_1 + \hat{D} = 180^o$ (2).

Vì ΔABC cân nên $\hat{B} = \hat{C}_2$ (3).

Thay (1) và (3) vào (2) được : $\hat{C}_2 + \hat{C}_2 + 2\hat{C}_1 = 180^o$,

hay $2(\hat{C}_1 + \hat{C}_2) = 180^o$.

Suy ra $\hat{C}_1 + \hat{C}_2 = \widehat{BCD} = 90^o$, vậy $DC \perp BC$.

b) Góc DAC là góc ngoài của ΔABC nên $\widehat{DAC} = \hat{B} + \hat{C}_2$.

Ta lại có $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (gt) hay $\widehat{DAC} = 2\hat{A}_1 = 2\hat{A}_2$ (4).

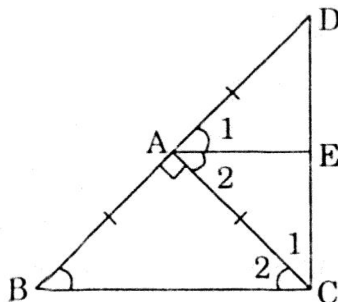
Mặt khác $\hat{B} = \hat{C}_2$ nên $\widehat{DAC} = 2\hat{B} = 2\hat{C}_2$ (5).

Từ (4) và (5) suy ra : $\hat{A}_1 = \hat{B}$ ở vị trí đồng vị nên AE // BC (hoặc $\hat{A}_2 = \hat{C}_2$ ở vị trí so le trong nên AE // BC).

Vì AE // BC và $DC \perp BC$ nên $DC \perp AE$. Vậy $AE \perp DC$.

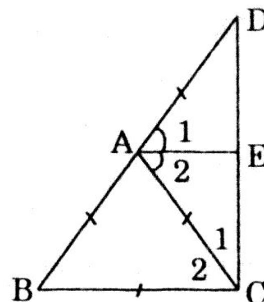
• ***Lời bình :*** *"Nếu ΔABC cân đã cho có $\hat{A}$ vuông hoặc ΔABC là tam giác đều thì các điều cần chứng minh ở trên có còn đúng không ?"*

Để giải đáp câu hỏi này ta hãy vẽ hình :



(a)

H.65



(b)

a) Nếu ΔABC có $\hat{A}$ vuông (hình 65a) thì nó là tam giác vuông cân nên $\hat{B} = \hat{C}_2 = 45^o$, và ΔACD cũng vuông cân nên $\hat{C}_2 = 45^o$, ta có ngay $\hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 90^o$, vậy $DC \perp BC$ (lời giải gọn hơn).

Do $\hat{C}_2 = \hat{A}_2 = 45^o$ ở vị trí so le trong nên AE // BC mà $\widehat{BCD}$ vuông suy ra $AE \perp DC$.

b) Nếu ΔABC đều (hình 65b) thì ba góc đều bằng 60^o và góc ngoài tại A là $\widehat{CAD} = 120^o$, suy ra $\hat{C}_2 = \hat{A}_2$ $(= 60^o)$ nên $\hat{C}_1 = 30^o$, do đó

$$\widehat{BCD} = 60^o + 30^o = 90^o$$

Vậy $DC \perp BC$.

Do $\hat{C}_2 = \hat{A}_2$ ở vị trí so le trong nên AE // BC, từ đó suy ra $\hat{E} = 90^o$ hay $AE \perp DC$ (lời giải gọn hơn).

14. Do ΔABC cân tại C nên $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ (hình 66).

Ta có : $\hat{B} = 90^o - \hat{C}_2$;

$$\hat{A}_1 = \frac{1}{2}\hat{A} = \frac{90^o - \hat{C}_1}{2}.$$

H.66

Từ M kẻ MP // BC cắt AD tại K.

Do AD = 2CM và CD // KM nên CM = KD.

Từ C kẻ đường thẳng song song với KD cắt MK kéo dài tại P.

Ta có PC = KD (tính chất đoạn chắn)

Do đó ΔCPM cân tại C và $\hat{P} = \widehat{CMP}$.

Mà $\widehat{CMP} = \hat{C}_2$ (so le trong), $\hat{P} = \hat{K}$ (đồng vị).

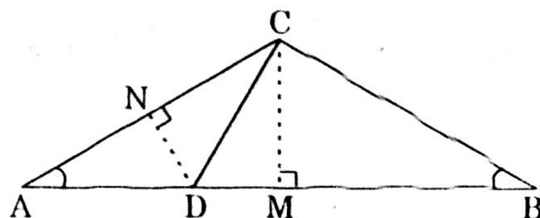
Suy ra $\hat{C}_2 = \hat{D}$.

Lại có góc ngoài tại D của ΔADB bằng $\hat{A}_1 + \hat{B}$, tức là $\hat{D} = 90^o - \hat{C}_2 + \frac{\hat{C}}{2}$

Suy ra $\hat{C}_2 = 54^o$. Vậy $\hat{C} = 108^o$.

• ***Lời bình :*** Nếu *"cho ΔABC cân tại đỉnh C mà $\hat{C} = 120^o$ và trên cạnh đáy AB lấy điểm D sao cho AD = a, DB = 2a và yêu cầu tính CD"* thì sẽ giải như thế nào ?

(Hình 67). Từ D kẻ $DN \perp AC$ ta có $\hat{A} = \hat{B} = 30^o$ vì $\widehat{ACB} = 120^o$, nên $DN = \frac{1}{2}AD = \frac{a}{2}$.



H.67

Ngoài ra nếu M là trung điểm của AB thì $DM = \frac{a}{2}$.

Do D cách đều CA và CM nên CD là tia phân giác của góc ACM, suy ra $\widehat{ACD} = 30^\circ$. Vậy ΔACD cân và CD = a.

15. Ta có $\widehat{BEC} = 50^\circ$ (hình 68a) nên CE = BC = a. Kẻ DI // BC, BI cắt CD ở K, ta được hai tam giác đều BKC và DKI. Suy ra KC = CE.

Xét $\Delta DKE = \Delta DIE$, suy ra DE là phân giác góc KDI. Do đó $\widehat{CDE} = 30^\circ$.

• ***Lời bình :***

a) Có thể giải cách khác như sau :

Dựng góc $\widehat{BCG} = 20^\circ$ (hình 68b).

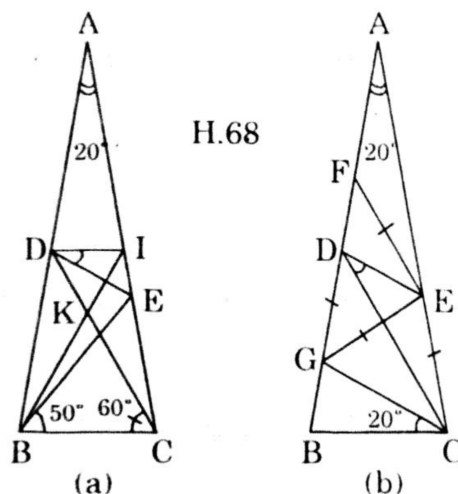
Ta có CG = BC = CE = a.

Tam giác ECG đều nên GE = a.

Nhưng $\widehat{BDC} = \widehat{GCD} = 40^\circ$ nên GD = GC = a.

Trong ΔDGE cân ta có $\widehat{DGE} = 40^\circ$, do đó $\widehat{GDE} = 70^\circ$.

Vậy $\widehat{CDE} = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ$.



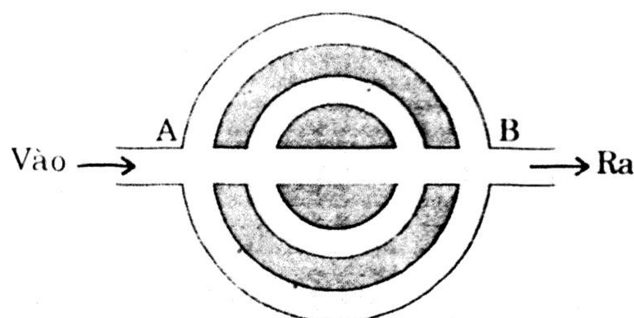
b) Từ bài ra ở trên ta có thể rút ra *tính chất lí thú về tam giác cân có góc ở đỉnh bằng 20°* sau đây :

Kẻ thêm EF // CD. Ta có $\widehat{EFG} = \widehat{FGE} = 40^\circ$, FE = GE = a. Nhưng $\widehat{FEA} = 20^\circ$ nên AF = FE = a. Như thế đường gấp khúc CGEF chia ΔABC thành 4 tam giác cân có cạnh bên bằng cạnh đáy của ΔABC (tức là AF = FE = EG = GC = BC) và các góc tương ứng tại đỉnh C là 20°, đỉnh G là 60°, đỉnh E là 100°, đỉnh F là 140° (tức là từ góc 20° ở đỉnh C nếu cộng thêm 40° thì được góc ở đỉnh G là 60° rồi cộng thêm 40° nữa được góc ở đỉnh E là 100°, cộng thêm 40° nữa được góc ở đỉnh F là 140°).

D. ĐỐ BẠN GIẢI ĐƯỢC

1. ***Vẽ lối đi một chiều***

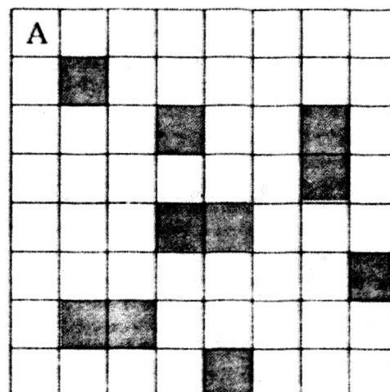
Cho hình 69. Hãy vẽ lối đi một chiều từ A đến B.



H.69

2. *Vẽ đường đi chỉ qua mỗi ô một lần*

Cho hình vuông 8 × 8 ô trong đó có 10 ô đen (hình 70). Hãy vẽ đường đi từ ô A qua tất cả các ô (không qua 10 ô đen) và chỉ qua mỗi ô một lần để cuối cùng trở lại đúng ô A.



H.70

§10. TỪ TAM GIÁC BẰNG NHAU ĐẾN ĐỊNH LÍ PITAGO

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

1. ***Ba trường hợp bằng nhau của tam giác***

Hai tam giác bằng nhau khi có :

a) ba cạnh bằng nhau từng đôi một (c.c.c).

b) một góc bằng nhau xen giữa hai cạnh bằng nhau từng đôi một (c.g.c).

c) một cạnh bằng nhau kề với hai góc bằng nhau từng đôi một (g.c.g).

2. ***Hai tam giác vuông bằng nhau*** *khi có :*

a) một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề bằng nhau từng đôi một, hoặc hai cạnh góc vuông bằng nhau từng đôi một.

b) cạnh huyền và một góc nhọn bằng nhau từng đôi một.

c) cạnh huyền và một cạnh góc vuông bằng nhau từng đôi một.

3. ***Tam giác cân. Tam giác đều***

a) Tam giác cân là tam giác có hai cạnh bằng nhau.

b) Trong một tam giác cân, hai góc ở đáy bằng nhau.

Ngược lại, nếu một tam giác có hai góc bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.

c) Tam giác đều là tam giác có ba cạnh bằng nhau.

d) Trong một tam giác đều mỗi góc bằng 60^{0}.

e) Nếu một tam giác có ba góc bằng nhau thì tam giác đó là tam giác đều.

g) Nếu một tam giác cận có một góc bằng 60^{0} thì tam giác đó là tam giác đều.

4. ***Định lí Pitago***

Trong một tam giác vuông, bình phương cạnh huyền bằng tổng các bình phương hai cạnh góc vuông.

Đảo lại, nếu một tam giác có bình phương một cạnh bằng tổng các bình phương hai cạnh kia thì tam giác đó là tam giác vuông.

B. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

1. Cho tam giác ABC có góc B nhọn. Vẽ tam giác vuông cân ABE (góc ABE vuông, A và E nằm ở hai phía đối với đường thẳng BC), tam giác vuông cận CBF (góc CBF vuông, C và F nằm ở hai phía đối với đường thẳng AB). Chứng minh $FA \perp EC$.

2. Cho tam giác đều ABC và điểm P trên cạnh BC. Qua P vẽ các đường thẳng song song với AB và AC, cắt AB và AC theo thứ tự tại E và F. Gọi M và N theo thứ tự là trung điểm của BE và CF. Chứng minh ΔPMN là tam giác đều.

3. Cho tam giác ABC (AC > AB). Vẽ trung tuyến AM và từ B kẻ BE $\perp$ AM, từ C kẻ CF $\perp$ AM. Chứng minh rằng :

a) Hai tam giác BME và CMF bằng nhau.

b) CE // BF.

4. Cho tam giác ABC. Ở miền ngoài tam giác vẽ hai tam giác đều ABD và ACK. Gọi M là trung điểm của BC và H là trực tâm của ΔABD. Tính số đo các góc của ΔKMH.

5. Cho tam giác ABC. Gọi H là trực tâm, G là trọng tâm và O là giao điểm các đường trung trực của tam giác. Chứng minh rằng ba điểm H, G, O thẳng hàng.

(*Chỉ dẫn.* Trước tiên hãy chứng minh rằng : "khoảng cách AH bằng 2 lần khoảng cách OM từ O đến cạnh BC đối diện góc A.")

6. Cho tam giác ABC với M, N, I theo thứ tự là trung điểm của ba cạnh AB, BC và CA. Ở miền ngoài tam giác ta vẽ các đoạn PM $\perp$ AB và PM = MA, QI $\perp$ AC và QI = IA.

a) So sánh hai góc BMN và NIC.

b) Chứng minh hai tam giác PMN và NIQ bằng nhau.

c) Tam giác PNQ là tam giác gì ? Tại sao ?

7. Trên cạnh AB của ΔABC lấy hai điểm D và E sao cho AD = DE = EB. Gọi I, J và K theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, AC và AB. Đoạn AI cắt CD tại P, đoạn BJ cắt CE tại Q. Chứng minh :

a) PQ là đường trung bình của ΔKIJ.

b) AB = 4PQ.

8. Gọi I là điểm nằm trong ΔABC sao cho $\widehat{ABI} = \widehat{ACI}$. Kẻ IH $\perp$ AB và IK $\perp$ AC. Gọi D, E, F theo thứ tự là trung điểm của BC, IB và IC. Chứng minh :

a) $\widehat{IEH} = \widehat{IFK}$ b) DH = DK.

9. Cho tam giác ABC. Ở miền ngoài của tam giác vẽ AD $\perp$ AB và AD = AB, rồi vẽ AE $\perp$ AC và AE = AC. Gọi I, J, K theo thứ tự là trung điểm của BD, CE và BC. Chứng minh :

a) BE = CD và BE $\perp$ CD b) ΔIJK vuông cân.

10. Ở miền ngoài tam giác ABC vẽ hai tam giác đều ABE và ACF.

a) Chứng minh BF = CE.

b) Gọi M là trung điểm của BC và H là trực tâm của ΔABE, tính số đo các góc của ΔHMF.

11. Ở miền ngoài ΔDEF vẽ ΔDFG vuông cân tại F. Đường cao DH của ΔDEF và đường cao FI của ΔEFG cắt nhau tại P. Chứng minh DP = EF.

12. Cho tam giác đều DEF. Trên các cạnh ED kéo dài, FE kéo dài và DF kéo dài theo thứ tự lấy các điểm P, Q, R sao cho DP = EQ = FR = cạnh tam giác đều DEF. Chứng minh :

a) QD $\perp$ DR. b) Tam giác PQR đều.

c) Nếu chỉ cho DP = EQ = FR thì ΔPQR có là tam giác đều nữa không ? Tại sao ?

13. Cho tam giác ABC. Kẻ các phân giác của các góc A và B, rồi từ đỉnh C kẻ hai đường thẳng song song với hai phân giác này. Chúng cắt nhau tại D và E sao cho DE // AB. Chứng minh ΔABC cân.

14. Cho tam giác cân ABC (AB = AC). Từ một điểm M trên cạnh BC hạ ME $\perp$ AB và MF $\perp$ AC. Kẻ đường cao BH. Chứng minh rằng ME + MF = BH.

15. Dựng tam giác ABC biết : hai góc A, B và hiệu hai cạnh BC – AC = a – b.

16. Dựng tam giác ABC biết : hai góc B, C và chu vi của nó.

17. Trong một công xưởng, giữa hai kho cách nhau 10m (hình 71) người ta kê một tấm ván dốc AB để chuyển đồ. Hai đầu tấm ván cách mặt đất 4m và 8m. Tính chiều dài của tấm ván AB.

H.71

18. Cho tam giác ABC vuông tại C trong đó $\widehat{A} = 60^\circ$, cạnh AC = 8cm.

a) Tính độ dài hình chiếu AC trên AB.

b) Tính cạnh huyền AB.

19. Cho tam giác ABC vuông tại A. Đường cao AH chia tam giác thành hai tam giác vuông khác. Các trung tuyến HN và HP ứng với các cạnh huyền bằng 3cm và 4cm. Tính độ dài trung tuyến AM của tam giác ABC.

C. CÁCH GIẢI VÀ LỜI BÌNH

1. Xét hai tam giác BAF và BEC (hình 72) ta có : BF = BC (gt) $\hat{B}_1 = \hat{B}_3$ (cùng phụ với $\hat{B}_2$) và BA = BE (gt), vậy : $\Delta BAF = \Delta BEC$ (c.g.c).

Suy ra $\widehat{BFA} = \widehat{BCE}$.

Nhưng $\widehat{BFA} = \widehat{BFC} + \widehat{CFI} = 45^\circ + \widehat{CFI}$ (1)

Lại có $\widehat{ICF} + \widehat{FCB} + \widehat{BCE} = 180^\circ$ (2)

H.72

Thay (1) vào (2) và biết $\widehat{FCB} = 45^o$, ta có :

$$\widehat{ICF} + 45^o + 45^o + \widehat{CFI} = 180^o \text{ hay } \widehat{ICF} + \widehat{CFI} = 90^o.$$

Vì tổng các góc trong ΔFIC bằng 180^o nên ta có ngay : $\widehat{FIC} = 90^o$, vậy $FA \perp EC$.

• ***Lời bình :*** Ta có thể *chứng minh ΔAEI vuông tại I* để từ đó suy ra $FA \perp EC$ như sau :

Từ $\Delta BAF = \Delta BEC$, suy ra $\widehat{BAF} = \widehat{BEC}$.

Nhưng $\widehat{BEC} = 45^o + \widehat{AEI}$ nên $\widehat{BAF} = 45^o + \widehat{AEI}$ (1)

Theo hình vẽ ta có : $\widehat{IAE} + \widehat{EAB} + \widehat{BAF} = 180^o$ (2)

Thay (1) vào (2) và biết $\widehat{EAB} = 45^o$ ta có ngay :

$$\widehat{IAE} + 45^o + 45^o + \widehat{AEI} = 180^o.$$

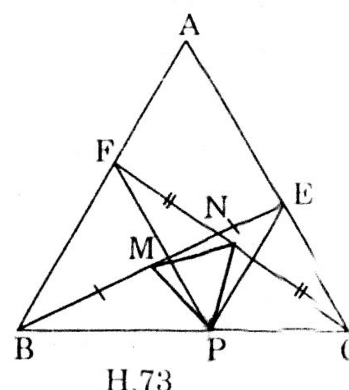
Suy ra $\widehat{IAE} + \widehat{AEI} = 90^o$, tức là $\widehat{FIC} = 90^o$ hay $FA \perp EC$.

2. Ta có PE // AB, PF // AC (gt) (hình 73).

Suy ra : AF = PE (tính chất đoạn chắn).

Lại có : $\widehat{EPC} = \widehat{ABC} = 60^o$ (đồng vị)

và : $\widehat{FPB} = \widehat{ACB} = 60^o$ (đồng vị)



H.73

Các tam giác FBP và ECP có hai góc cùng bằng 60^o nên là tam giác đều, do đó có FB = BP = PF và EP = PC = CE.

Xét hai tam giác BEC và CFA có :

BC = AC (gt), $\widehat{BCE} = \widehat{FAC} = 60^o$ (vì ΔABC đều),

CE = AF (vì AF = PE, PE = CE)

nên chúng bằng nhau (c.g.c). Suy ra BE = CF.

Lại có M, N là trung điểm của BE, CF mà BE = CF (theo chứng minh trên) nên MB = NF.

Từ $\Delta BEC = \Delta CFA$ ta có $\widehat{EBC} = \widehat{FCA}$, do PF // AC nên $\widehat{PFC} = \widehat{FCA}$, từ đó có $\widehat{EBC} = \widehat{PFC}$.

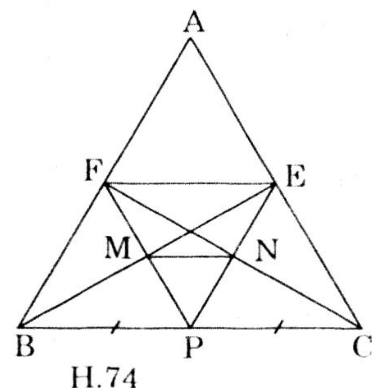
Xét hai tam giác MBP và NFP có MB = NF, $\widehat{EBC} = \widehat{PFC}$, BP = PF nên chúng bằng nhau (c.g.c), suy ra PM = PN hay ΔPMN cân.

Từ $\Delta MBP = \Delta NFP$ ta có $\widehat{MPB} = \widehat{NPF}$, mà $\widehat{BPM} + \widehat{MPF} = \widehat{BPF} = 60^o$ (vì ΔFBP đều) nên $\widehat{MPF} + \widehat{FPN} = \widehat{MPN} = 60^o$.

Tam giác cân PMN có $\widehat{MPN} = 60^o$ nên là tam giác đều.

• ***Lời bình :*** Nếu cho *"P là trung điểm của cạnh BC thì tam giác PMN có là tam giác đều nữa không ?"*

Trước tiên ta vẽ hình (hình 74). Để trả lời câu hỏi, ta vận dụng định lí về đường trung bình trong một tam giác vào 4 tam giác bằng nhau trong bài toán để có ngay $\widehat{MPN} = 60^\circ$.



H.74

$\Delta BEC = \Delta CFB$ (c.g.c),

suy ra BE = CF, do đó MB = NC.

$\Delta MBP = \Delta NCP$ (c.g.c),

suy ra PM = PN hay ΔPMN cân.

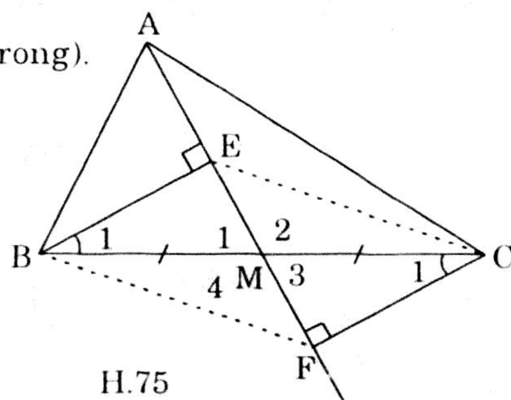
Tam giác cân PMN có $\widehat{MPN} = 60^\circ$ nên là tam giác đều.

3. (Hình 75).

a) Ta có BE ⊥ AM, CF ⊥ AM (gt).

Suy ra BE // CF, nên $\widehat{B}_1 = \widehat{C}_1$ (so le trong).

Hai tam giác BME và CMF có :
$\widehat{B}_1 = \widehat{C}_1$, MB = MC, $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_3$ (đối đỉnh) nên chúng bằng nhau, tức là $\Delta BME = \Delta CMF$ (g.c.g).



H.75

b) Xét hai tam giác BMF và CME có :

MF = ME (vì $\Delta BME = \Delta CMF$)

$\widehat{M}_2 = \widehat{M}_4$ (đối đỉnh),

MB = MC nên chúng bằng nhau, tức là $\Delta BMF = \Delta CME$ (c.g.c), suy ra $\widehat{ECB} = \widehat{FBC}$. Hai góc này ở vị trí góc so le trong nên CE // BF.

• ***Lời bình :*** *"Trên cạnh AB ta lấy điểm D và trên cạnh AC lấy điểm E sao cho BD = CE. Các đường trung trực của BC và DE cắt nhau tại I. Hãy chứng minh hai tam giác BID và CIE bằng nhau."*

Cách giải sẽ như sau (hình 76) :

Do IH là trung trực của DE nên ID = IE (1)

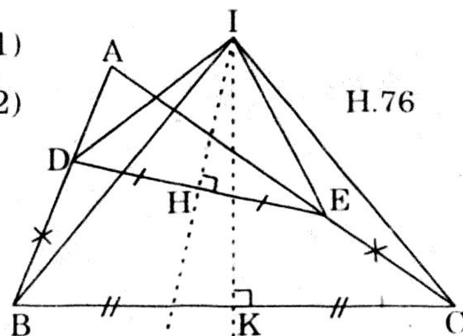
Do IK là trung trực của BC nên IB = IC (2)

Hai tam giác BID và CIE có :

ID = IE (theo 1), IB = IC (theo 2)

và DB = CE (gt) nên chúng bằng nhau,

vậy $\Delta BID = \Delta CIE$ (c.c.c).



H.76

4. Căn cứ vào hình vẽ (hình 77) ta dự đoán rằng ΔKMH có thể là nửa tam giác đều, muốn vậy phải chứng minh KM ⊥ HM.

Kéo dài HM trên đó lấy MP = MH, như vậy KM là trung tuyến của ΔKHP.

Vì H là trực tâm của tam giác đều ABD nên suy ra HA = HB (1)

Xét hai tam giác BHM và CPM có :

MC = MB (gt),

$\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$ (đối đỉnh),

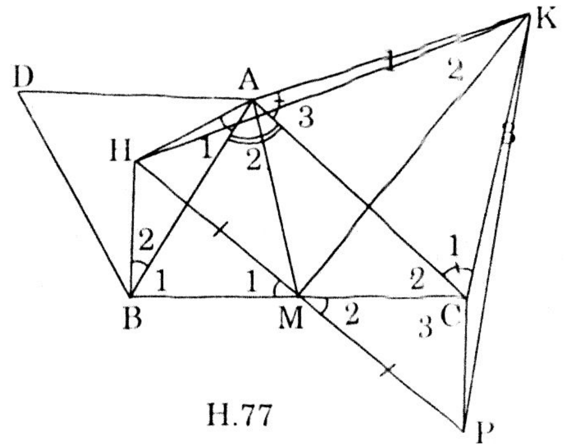
MH = MP (theo cách dựng)

nên chúng bằng nhau, tức là

ΔBHM = ΔCPM (c.g.c),

suy ra HB = CP (2)

Từ (1) và (2) suy ra HA = CP (3)



H.77

Trong ΔABD đều thì HA, HB cũng là phân giác nên $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_2 = 30^o$.

Lại có $\widehat{HAK} = \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 + \widehat{A}_3 = 30^o + \widehat{A}_2 + 60^o = 90^o + \widehat{A}_2$ (4)

Mặt khác $\widehat{PCK} = 360^o - (\widehat{C}_1 + \widehat{C}_2 + \widehat{C}_3)$

với $\widehat{C}_1 = 60^o$ (vì ΔACK đều) và $\widehat{C}_3 = \widehat{B}_1 + \widehat{B}_2$ (do ΔBHM = ΔCPM)

$= \widehat{B}_1 + 30^o$.

Từ đó $\widehat{PCK} = 360^o - (60^o + \widehat{C}_2 + \widehat{B}_1 + 30^o) = 270^o - (\widehat{B}_1 + \widehat{C}_2)$.

Trong ΔABC, ta có : $\widehat{B}_1 + \widehat{C}_2 = 180^o - \widehat{A}_2$, do đó :

$\widehat{PCK} = 270^o - (180^o - \widehat{A}_2) = 90^o + \widehat{A}_2$ (5)

Từ (4) và (5) có : $\widehat{HAK} = \widehat{PCK}$ (6)

Xét hai tam giác HAK và PCK có : HA = CP (theo 3),

$\widehat{HAK} = \widehat{PCK}$ (theo 6),

AK = CK (vì ΔACK đều)

nên chúng bằng nhau, tức là ΔHAK = ΔPCK (c.g.c). Suy ra KH = KP, hay ΔKHP cân.

Trong ΔKHP cân, trung tuyến KM cũng là đường cao nên $\widehat{KMH} = 90^o$. Ta thấy $\widehat{K}_1 = \widehat{K}_3$ (vì ΔHAK = ΔPCK), mà $\widehat{K}_1 + \widehat{K}_2 = 60^o$ (vì ΔACK đều) nên $\widehat{K}_2 + \widehat{K}_3 = 60^o = \widehat{HKP}$.

Tam giác cân KHP có $\widehat{HKP} = 60^o$ là tam giác đều, suy ra $\widehat{MHK} = 60^o$. Đường cao KM trong ΔKHP đều cũng là phân giác nên $\widehat{MKH} = 30^o$.

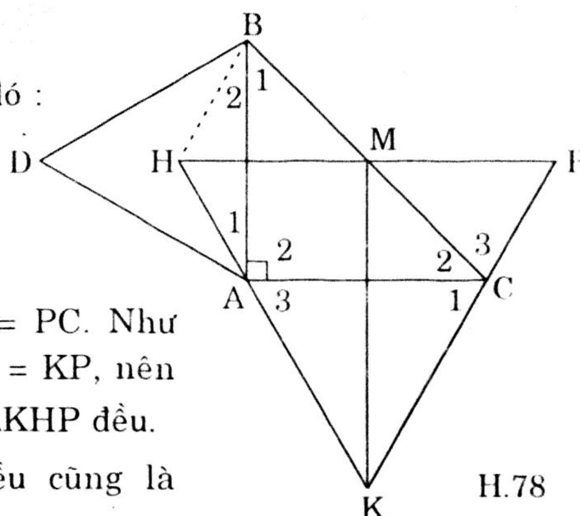
Vậy ba góc của ΔKMH có số đo là :

$\widehat{KMH} = 90^o$, $\widehat{MHK} = 60^o$ và $\widehat{MKH} = 30^o$.

• *Lời bình :* Hãy xét *"trường hợp ΔABC vuông cân tại A"*.

Trước hết ta vẽ hình (hình 78).

Ta có $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 30^\circ + 90^\circ + 60^\circ = 180^\circ$, tức là ba điểm H, A, K thẳng hàng.



H.78

$\Delta BHM = \Delta CPM$ nên

$\hat{C}_3 = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$, từ đó :

$\hat{C}_1 + \hat{C}_2 + \hat{C}_3 = 60^\circ + 45^\circ + 75^\circ$

$= 180^\circ$.

tức là ba điểm P, C, K thẳng hàng.

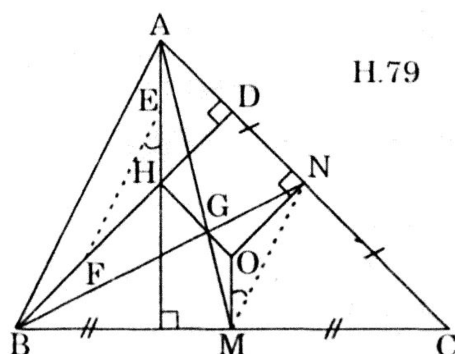
Do HB = PC, HB = HA nên HA = PC. Như vậy HA + AK = PC + CK, hay KH = KP, nên ΔKHP cân, lại có $\widehat{HKP} = 60^\circ$ nên ΔKHP đều.

Trung tuyến KM trong ΔKHP đều cũng là đường cao, phân giác, do đó :

$\widehat{KMH} = 90^\circ$, $\widehat{MKH} = 30^\circ$ và $\widehat{MHK} = 60^\circ$.

• *Lưu ý thêm* : Khi ΔABC vuông cân tại A thì hai tam giác HAK và PCK đã suy biến thành hai đoạn thẳng KH và KP. Ta đã chứng minh được KH = KP để có ΔKHP cân và sau đó là đều.

. Đây là *bài toán về ba điểm đặc biệt trong tam giác* : trực tâm, trọng tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp (tức là giao điểm ba đường trung trực) luôn thẳng hàng.



H.79

a) **Trước tiên ta hãy chứng minh khoảng cách *AH = 2OM* (hình 79).**

Thật vậy, ta có :

$MN = \frac{1}{2}AB$ (MN là đường trung bình trong ΔABC) (1)

Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AH và BH, ta lại có :

$EF = \frac{1}{2}AB$ (EF là đường trung bình trong ΔHAB) (2)

Từ (1) và (2) suy ra MN = EF (3)

Xét hai tam giác OMN và HEF có :

$\widehat{ONM} = \widehat{HFE}$ (góc có cạnh tương ứng song song),

MN = EF (theo 3),

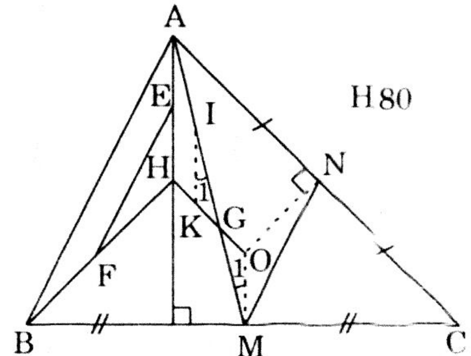
$\widehat{OMN} = \widehat{HEF}$ (góc có cạnh tương ứng song song)

nên chúng bằng nhau, tức là $\Delta OMN = \Delta HEF$ (g.c.g), suy ra HE = OM.

Vì E là trung điểm của AH nên AH = 2EH = 2OM.

b) Xác định trọng tâm G, giao điểm O của hai đường trung trực (hình 80).

Nối OH cắt trung tuyến AM tại G. Ta sẽ chứng minh rằng $AG = \frac{2}{3}AM$ thì sẽ có G là trọng tâm ΔABC, khi đó rõ ràng ba điểm H, G, O thẳng hàng.



Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AH và BH.

Theo câu a) thì AH = 2OM (1)

Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của AG và HG ta có IK là đường trung bình của ΔAHG, suy ra IK // AH

và $IK = \frac{1}{2}AH$ hay AH = 2IK (2)

Từ (1) và (2) suy ra IK = OM, IK // OM vì cùng song song AH.

Xét hai tam giác IKG và MOG có : $\hat{I}_1 = \widehat{M}_1$ (so le trong), IK = OM, $\widehat{IGK} = \widehat{OGM}$ (đối đỉnh) nên chúng bằng nhau,

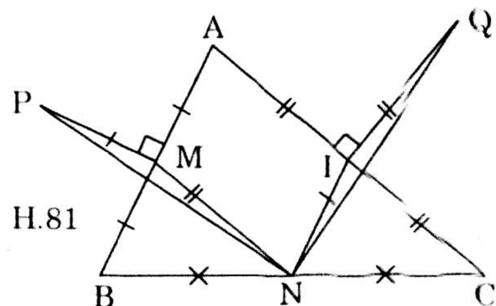
tức là $\Delta IKG = \Delta MOG$ (g.c.g), suy ra IG = GM.

Như vậy ta có : AI = IG = GM hay $AG = \frac{2}{3}AM$, do đó G chính là trọng tâm ΔABC. Vậy ba điểm H, G, O thẳng hàng.

- ***Lời bình :*** *Đường thẳng đi qua ba điểm đặc biệt H, G, O gọi là đường thẳng Ơle.*

Cách chứng minh ba điểm thẳng hàng trong bài này cũng đặc biệt : Qua đường thẳng HO ta vẽ trung tuyến AM cắt HO tại G, sau đó chứng minh G chính là trọng tâm của ΔABC, dựa vào tính chất : trọng tâm của một tam giác cách mỗi đỉnh một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ trung tuyến đi qua đỉnh ấy.

6. (Hình 81).



a) Vì M, N theo thứ tự là trung điểm của AB và BC nên MN // AC (đường trung bình trong ΔABC). Tương tự có IN // AB.

Vậy $\widehat{BMN} = \widehat{NIC}$ (góc có cạnh tương ứng song song).

b) Do PM ⊥ AB nên $\widehat{PMB} = 90^\circ$, QI ⊥ AC nên $\widehat{QIC} = 90^\circ$.

Xét hai tam giác PMN và NIQ có :

$PM = NI$ (vì cùng bằng $\frac{1}{2}AB$),

$\widehat{PMN} = \widehat{NIQ}$ (vì $\widehat{PMB} = \widehat{QIC} = 90^\circ$ và $\widehat{BMN} = \widehat{NIC}$ theo câu a)

và $MN = IQ$ (vì cùng bằng $\frac{1}{2}AC$)

nên chúng bằng nhau, tức là $\Delta PMN = \Delta NIQ$ (c.g.c).

c) Do $\Delta PMN = \Delta NIQ$ nên có $NP = NQ$ hay ΔPNQ cân.

Mặt khác do NI // AB nên $\widehat{BMN} = \widehat{MNI}$ (so le trong) (*)

Theo hình vẽ, trong ΔPMN có :

$$\widehat{PMN} + \widehat{MNP} + \widehat{NPM} = 180^\circ,$$

mà $\widehat{PMN} = 90^\circ + \widehat{BMN} = 90^\circ + \widehat{MNI}$ (theo (*))

và $\widehat{MPN} = \widehat{QNI}$ (vì $\Delta PMN = \Delta NIQ$), do đó :

$$90^\circ + \widehat{MNI} + \widehat{MNP} + \widehat{QNI} = 180^\circ,$$ suy ra $\widehat{PNQ} = 90^\circ$.

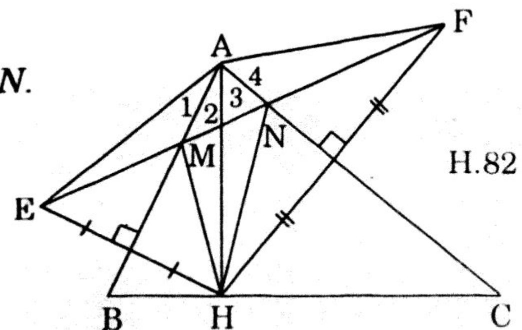
Tam giác cân PNQ có $\widehat{PNQ} = 90^\circ$ nên là tam giác vuông cân.

- ***Lời bình :*** **Nếu bài ra là :** *"Cho tam giác nhọn ABC và đường cao AH. Vẽ điểm E sao cho AB là trung trực của đoạn HE, rồi vẽ điểm F sao cho AC là trung trực của đoạn HF. Nối E với F cắt AB tại M và cắt AC tại N. Chứng minh :*

a) Tam giác AEF cân.

b) Tia HA là tia phân giác của góc MHN.

c) $\widehat{A} = \frac{1}{2}\widehat{EAF}$"



H.82

thì cách giải như sau (hình 82) :

a) Do AB là trung trực của EH

nên $AE = AH$ (1)

và AC là trung trực của HF nên $AF = AH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AE = AF$, do đó ΔAEF cân.

b) Do $AE = AF$ (cmt) nên ΔAEF cân, suy ra $\widehat{AEF} = \widehat{AFE}$ (3)

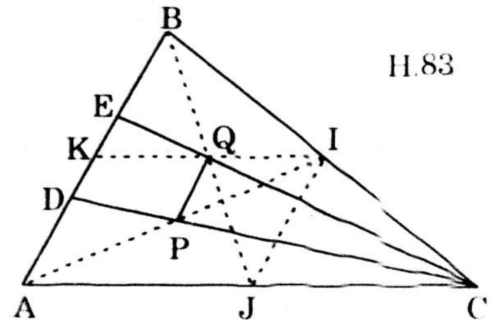
Xét hai tam giác AEM và AHM có : $AE = AH$, $EM = HM$ (vì AB là trung trực của EH) và AM là cạnh chung nên chúng bằng nhau, tức là $\Delta AEM = \Delta AHM$ (c.c.c), suy ra $\widehat{AEF} = \widehat{AHM}$ (4)

Xét hai tam giác AFN và AHN có : $AF = AH$, $NF = NH$ (vì AC là trung trực của HF) và AN là cạnh chung nên chúng bằng nhau, tức là $\Delta AFN = \Delta AHN$, suy ra $\widehat{AHN} = \widehat{AFE}$ (5)

Từ (3), (4), (5) suy ra $\widehat{AHM} = \widehat{AHN}$, tức là tia AH là tia phân giác của $\widehat{MHN}$.

c) Tam giác AEH cân (do đối xứng) nên $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ và tam giác AHF cân nên $\widehat{A}_3 = \widehat{A}_4$, mà $\widehat{A}_2 + \widehat{A}_3 = \widehat{A}$, $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 + \widehat{A}_3 + \widehat{A}_4 = \widehat{EAF}$,

nên $\widehat{A} = \frac{1}{2}\widehat{EAF}$.



7. a) (Hình 83). Do D và J là trung điểm của AE và AC (gt) nên DJ là đường trung bình của ΔAEC, do đó EC // DJ. Lại có E là trung điểm của DB nên Q là trung điểm của BJ.

Do K là trung điểm của AB nên KQ là đường trung bình của ΔABJ, ta có : KQ // AC và $KQ = \frac{1}{2}AJ$.

Tương tự QI // AC và $QI = \frac{1}{2}JC$.

Nhưng A, J, C thẳng hàng và AJ = JC, suy ra K, Q, I thẳng hàng và KQ = QI (1)

Chứng minh tương tự ta có K, P, J thẳng hàng và KP = PJ (2)

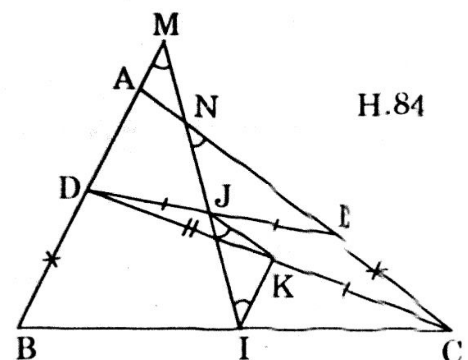
Từ (1) và (2) suy ra PQ là đường trung bình của ΔKIJ.

b) Vì PQ là đường trung bình nên $PQ = \frac{1}{2}IJ$ (3), mà IJ lại là đường trung bình của ΔABC nên : $IJ = \frac{1}{2}AB$ (4).

Vậy từ (3) và (4) ta có ngay AB = 4PQ.

- ***Lời bình :*** Tương tự, ta giải bài toán sau :

"Cho ΔABC, trên hai cạnh AB và AC ta lấy theo thứ tự hai điểm D và E sao cho DB = EC. Gọi I, J, K theo thứ tự là trung điểm của BC, DE và DC. Đường thẳng IJ cắt AB và AC tại M và N. Chứng minh rằng ΔIJK cân và ΔAMN cân."



Cách giải như sau (hình 84) :

Do I và K theo thứ tự là trung điểm của BC và DC nên IK là đường trung bình trong ΔCBD,

suy ra KI // DB và $KI = \frac{1}{2}BD$ (1)

Chứng minh tương tự đối với ΔDEC ta có JK // EC và $JK = \frac{1}{2}EC$ (2)

Từ (1), (2) và BD = EC (gt) $\Rightarrow$ KI = KJ, vậy ΔIJK cân tại K và $\hat{I} = \hat{J}$ (3)

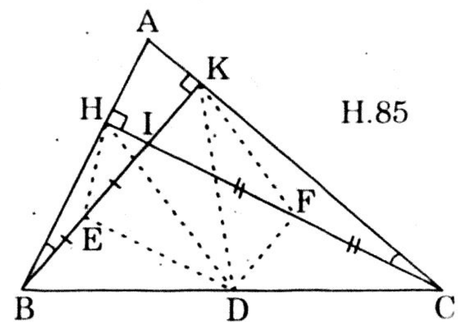
Do KI // DB nên $\widehat{M} = \widehat{JIK}$ (so le trong) (4)

do JK // EC nên $\widehat{IJK} = \widehat{N}$ (đồng vị) (5)

Từ (3), (4) và (5) ta có : $\widehat{M} = \widehat{N}$.

Vì hai góc tại N đối đỉnh bằng nhau nên tam giác AMN cân.

8. a) Tam giác vuông HIB có EB = EI (gt) nên HE là trung tuyến ứng với cạnh huyền IB và ta có EB = EI = EH (hình 85).



ΔHEB cân nên $\widehat{ABI} = \widehat{BHE}$ (1)

Mặt khác có $\widehat{HEI}$ là góc ngoài của ΔHEB nên $\widehat{HEI} = \widehat{ABI} + \widehat{BHE}$ (2)

Thay (1) vào (2) được :

$$\widehat{HEI} = 2\widehat{ABI} \quad (3)$$

Chứng minh tương tự đối với tam giác vuông IKC và tam giác cân KFC ta có $\widehat{IFK} = 2\widehat{ACI}$ (4)

Từ (3), (4) và giả thiết $\widehat{ABI} = \widehat{ACI}$ suy ra $\widehat{IEH} = \widehat{IFK}$.

b) Vì F và D là trung điểm của IC và BC nên DF là đường trung bình của tam giác IBC, do đó DF // IB và $DF = \frac{1}{2}IB = HE$ (5)

Chứng minh tương tự ta có DE // IC và $DE = \frac{1}{2}IC = KF$ (6)

Lại có $\widehat{IED} = \widehat{IFD}$ (góc có cạnh tương ứng song song)

mà $\widehat{IEH} = \widehat{IFK}$ (theo câu a)

nên $\widehat{IEH} + \widehat{IED} = \widehat{IFK} + \widehat{IFD}$, hay $\widehat{HED} = \widehat{DFK}$ (7)

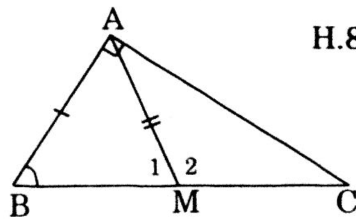
Cuối cùng xét hai tam giác HED và DFK có : HE = DF, $\widehat{HED} = \widehat{DFK}$ và DE = KF nên chúng bằng nhau, tức là $\Delta HED = \Delta DFK$ (c.g.c).

Suy ra DH = DK.

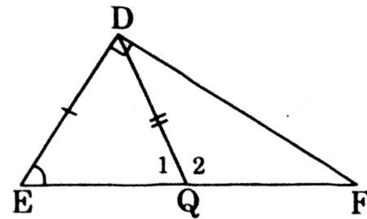
- ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau :

"Cho hai tam giác vuông ABC và DEF (vuông tại A và tại D) có AB = DE và hai trung tuyến AM = DQ. Chứng minh rằng ba cặp tam giác sau bằng nhau : ΔABM và ΔDEQ, ΔAMC và ΔDQF, ΔABC và ΔDEF."

Ta có (hình 86) :



H.86



a) Do AM = DQ nên BM = EQ, ta có ngay $\Delta ABM = \Delta DEQ$ (c.c.c).

b) Từ câu a suy ra $\widehat{M}_1 = \widehat{Q}_1$, do đó $\widehat{M}_2 = \widehat{Q}_2$ và ta có $\Delta AMC = \Delta DQF$ (c.g.c).

c) Do $\Delta ABM = \Delta DEQ$ và $\Delta AMC = \Delta DQF$ nên cộng từng vế ta có ngay $\Delta ABC = \Delta DEF$ hoặc do $\widehat{B} = \widehat{E}$ và BC = EF, từ hai câu a) và b) nên $\Delta ABC = \Delta DEF$ (cạnh huyền và một cạnh góc vuông).

9. (Hình 87)

a) Xét hai tam giác DAC và BAE có : AD = AB, $\widehat{DAC} = \widehat{BAE} = 90^o + \widehat{A}$, AC = AE nên chúng bằng nhau, tức là $\Delta DAC = \Delta BAE$ (c.g.c).

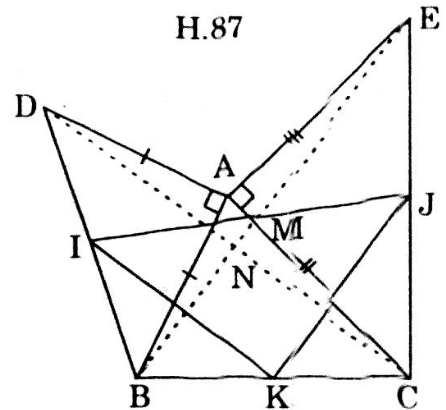
Suy ra DC = BE và $\widehat{AEB} = \widehat{ACD}$.

Gọi M và N theo thứ tự là giao điểm của BE với AC và DC ta có

$$\widehat{AME} + \widehat{AEM} = 90^o.$$

Trong ΔMNC có $\widehat{NMC} + \widehat{NCM} = 90^o$.

Suy ra $\widehat{MNC} = 90^o$, tức là $DC \perp BE$.



b) KI là đường trung bình trong ΔBDC (vì I, K là trung điểm của BD và BC) nên KI // CD và $KI = \frac{1}{2}CD$. Tương tự KJ // BE và $KJ = \frac{1}{2}BE$.

Từ đó suy ra KI = KJ và $KI \perp KJ$ tại K. Vậy ΔIJK là vuông cân.

- ***Lời bình :*** Xét thêm : *"Ta kẻ đường cao AH cắt DE ở P, hãy chứng minh P là trung điểm của DE."*

Cách giải như sau (hình 88) :

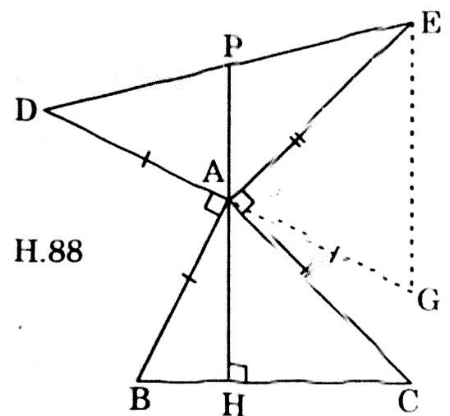
Kéo dài DA một đoạn AG = DA. Xét hai tam giác ABC và AGE có :

AB = AG,

$\widehat{BAC} = \widehat{GAE}$ (vì cùng phụ với $\widehat{CAG}$)

và AC = AE

nên chúng bằng nhau, tức là $\Delta ABC = \Delta AGE$ (c.g.c).



Suy ra $\widehat{ABC} = \widehat{AGE}$, mà $\widehat{ABC} = \widehat{DAP}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc).

Từ đó ta có ngay $\widehat{DAP} = \widehat{AGE}$ (ở vị trí đồng vị), suy ra AP // GE.

Xét ΔDGE có A là trung điểm của DG và AP // GE nên P phải là trung điểm của DE.

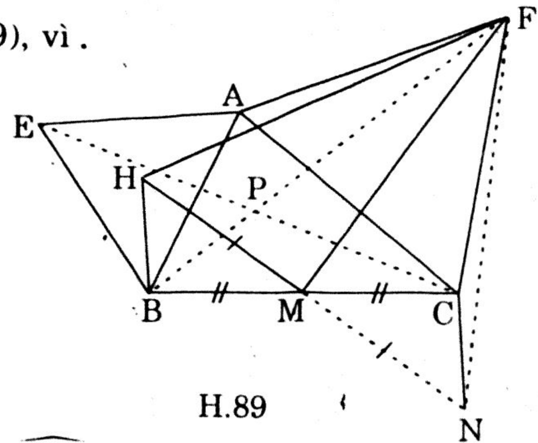
10. a) Ta có $\Delta EAC = \Delta BAF$ (c.g.c) (hình 89), vì

$AE = AB$ (gt),

$\widehat{EAC} = \widehat{BAF}$ $(= 60^\circ + \widehat{A})$,

$AC = AF$ (gt).

Suy ra BF = CE.



H.89

b) Kéo dài HM một đoạn MN = HM.

Ta có ngay $\Delta BMH = \Delta CMN$ (c.g.c)

nên BH = CN và $\widehat{HBM} = \widehat{NCM}$.

Lại có : $\widehat{HBM} = 30^\circ + \widehat{B}$ (vì BH là phân giác) nên $\widehat{NCM} = 30^\circ + \widehat{B}$.

Theo hình vẽ, ta có :

$$\widehat{HAF} = \widehat{HAB} + \widehat{A} + \widehat{CAF} = 30^\circ + \widehat{A} + 60^\circ = 90^\circ + \widehat{A} \quad (1)$$

$$\widehat{NCF} = 360^\circ - \widehat{NCM} - \widehat{C} - \widehat{ACF} = 360^\circ - (30^\circ + \widehat{B}) - \widehat{C} - 60^\circ$$

$$= 270^\circ - (\widehat{B} + \widehat{C}) = 270^\circ - (180^\circ - \widehat{A}) = 90^\circ + \widehat{A} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) có : $\widehat{HAF} = \widehat{NCF}$.

Như vậy $\Delta HAF = \Delta NCF$ (c.g.c). Suy ra HF = NF và $\widehat{AFH} = \widehat{CFN}$.

Lại có $\widehat{HFN} = 60^\circ$ (vì $\widehat{AFH} + \widehat{HFC} = 60^\circ$ nên $\widehat{CFN} + \widehat{HFC} = 60^\circ$).

Suy ra ΔHFN đều nên trung tuyến FM của nó cũng là phân giác và đường cao, do đó các góc của ΔHMF là :

$$\widehat{FHM} = 60^\circ,\ \widehat{HMF} = 90^\circ \text{ và } \widehat{HFM} = 30^\circ.$$

• ***Lời bình :*** Có thể thêm các câu hỏi sau :

c) "Gọi P là giao điểm của BF và CE, tính số đo của góc BPC.

d) Nếu AB < BC, chứng minh ME < MF."

Cách giải như sau :

c) Vì $\Delta EAC = \Delta BAF$ (câu a) nên $\widehat{ECA} = \widehat{AFB}$

mà $\widehat{ACF} = 60^\circ$ và $\widehat{F} = 60^\circ = \widehat{ECA} + \widehat{BFC}$.

nên $\widehat{ECA} + \widehat{BFC} + \widehat{ACF} = 120^\circ$ hay $\widehat{PCF} + \widehat{PFC} = 120^\circ$.

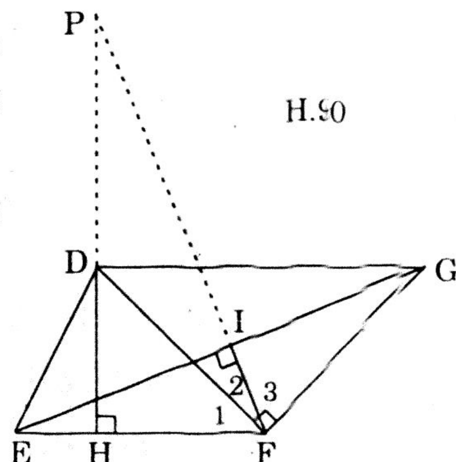
Suy ra $\widehat{CPF} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Do $\widehat{BPC} + \widehat{CPF} = 180^\circ$ nên $\widehat{BPC} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

d) Xét hai tam giác EBC và FBC có CE = BF (câu a), BC chung, EB < FC (do AB < BC theo gt) nên $\widehat{ECB} < \widehat{FBC}$.

Xét hai tam giác ECM và FBM có CE = BF, MC = MB và $\widehat{ECM} < \widehat{FBM}$ nên ME < MF.

11. Ta có PD ⊥ EF, DF ⊥ FG (hình 90), suy ra $\widehat{PDF} = \widehat{EFG}$ (góc cùng tù có cạnh tương ứng vuông góc). Lại có $\hat{F}_2 + \hat{F}_3 = 90^\circ$, $\hat{G} + \hat{F}_3 = 90^\circ$ (gt), suy ra $\hat{F}_2 = \hat{G}$ (góc cùng nhọn có cạnh tương ứng vuông góc).

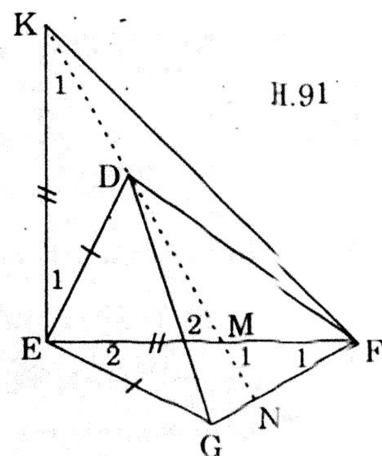


Xét hai tam giác DFP và EFG có DF = FG, $\hat{F}_2 = \hat{G}$, $\widehat{PDF} = \widehat{EFG}$ nên chúng bằng nhau, tức là ΔDFP = ΔEFG (g.c.g).

Vậy DP = EF.

- ***Lời bình :*** Với bài toán trên, *"nếu ta vẽ ΔEDG vuông cân tại E và tam giác EFK cũng vuông cân tại E, hãy chứng minh KD ⊥ GF"* thì cách giải sẽ thay đổi như thế nào ?

Ta vẽ lại hình (hình 91).



Xét hai tam giác DEK và GEF có :

EK = EF,

ED = EG (gt)

và $\hat{E}_1 = \hat{E}_2$ (cùng phụ với $\hat{E}$)

nên chúng bằng nhau, tức là

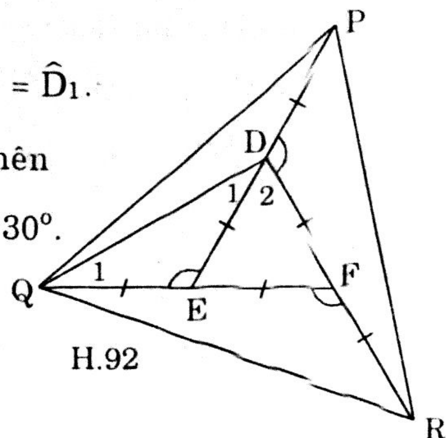
ΔDEK = ΔGEF (c.g.c).

Suy ra $\hat{K}_1 = \hat{F}_1$. Lại có $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$ (đối đỉnh) nên $\hat{K}_1 + \widehat{M}_2 = \hat{F}_1 + \widehat{M}_1$.

Tam giác vuông EKM đã có hai góc $\hat{K}_1 + \widehat{M}_2 = 90^\circ$, nên hai góc $\hat{F}_1 + \widehat{M}_1 = 90^\circ$. Suy ra $\widehat{MNF} = 90^\circ$, tức là KD ⊥ GF.

12. (Hình 92).

a) Rõ ràng ta có ΔEQD cân tại E, suy ra $\hat{Q}_1 = \hat{D}_1$.



Góc DEF là góc ngoài của tam giác trên nên

$\widehat{DEF} = \hat{Q}_1 + \hat{D}_1 = 2\hat{D}_1 = 60^\circ$, suy ra $\hat{D}_1 = 30^\circ$.

Vậy $\hat{D}_1 + \hat{D}_2 = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$,

tức là QD ⊥ DR.

b) Xét ba tam giác QEP, RDP và QFR bằng nhau (c.g.c) vì có

$$DP = EQ = FR \text{ (gt)},$$

$$\widehat{QEP} = \widehat{QFR} = \widehat{RDP} = 120^{\circ},$$

$$EP = QF = DR \text{ (gt)}.$$

Suy ra $QP = QR = PR$, tức là tam giác PQR đều.

c) Trong trường hợp này ta có : $EP = ED + DP$,

$$FQ = FE + EQ,$$

$$DR = DF + FR,$$

mà $ED = FE = DF$ (do ΔDEF đều) và $DP = EQ = FR$ (gt),

suy ra $EP = FQ = DR$.

Các góc tù tại D, E và F đều bằng 120°. Vậy ta vẫn có ba tam giác QEP, RDP và QFR bằng nhau (c.g.c) như câu b).

Từ đó suy ra $QP = QR = PR$, tức là ΔPQR vẫn đều.

• ***Lời bình :*** Xét thêm câu hỏi sau :

"Gọi I là tâm của tam giác đều DEF, chứng minh rằng $IP \perp QR$."

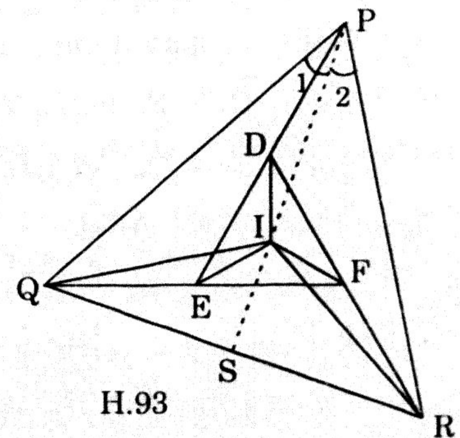
Ta vẽ lại hình (hình 93). Nối ID, IE, IF, chúng là phân giác các góc 60° của ΔDEF đều, nên ta có :

$$\widehat{QEI} = \widehat{RFI} = 120^{\circ} + 30^{\circ} = 150^{\circ}$$

mà $IE = IF$, $EQ = FR$.

Suy ra $\Delta QEI = \Delta RFI$ (c.g.c), từ đó $IQ = IR$.

Lại có $\Delta PIQ = \Delta RIP$ (c.c.c), vì $IQ = IR$, IP chung và $PQ = PR$.



H.93

Suy ra $\hat{P}_1 = \hat{P}_2$, mà $\hat{P} = 60^{\circ}$ (vì ΔPQR đều) nên $\hat{P}_1 = 30^{\circ}$.

Gọi S là giao điểm của PI và QR, trong tam giác PSQ có

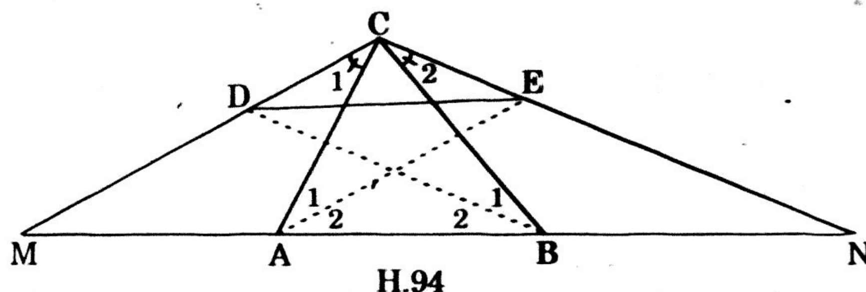
$$\hat{P}_1 + \hat{Q} = 30^{\circ} + 60^{\circ} = 90^{\circ} \text{ nên } \widehat{PSQ} = 90^{\circ},$$

tức là $PS \perp QR$, hay $PI \perp QR$.

* *Lưu ý thêm* : Có thể chứng minh gọn hơn nếu biết được "tính chất đường trung trực của một đoạn thẳng".

Thật vậy, từ $PQ = PR$ và $IQ = IR$ ta thấy ngay là hai điểm P và I cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng QR nên chúng nằm trên đường trung trực của QR (định lí đảo). Vậy $PI \perp QR$.

13. (Hình 94).



H.94

Gọi M và N theo thứ tự là giao điểm của CD và CE với đường thẳng AB. Theo bài ra $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ (do AE là phân giác) và $\widehat{A}_1 = \widehat{C}_1$ (so le trong), $\widehat{A}_2 = \widehat{M}$ (đồng vị). Do đó $\widehat{C}_1 = \widehat{M}$. Vậy ΔAMC cân.

Tương tự ta có $\widehat{C}_2 = \widehat{N}$ và ΔBCN cân. Suy ra AM = AC và BN = BC. Chỉ còn phải chứng minh AM = BN (hoặc MB = AN).

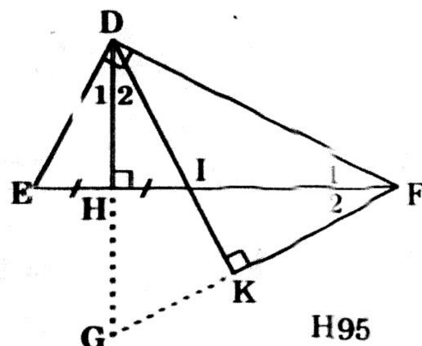
Thật vậy, điều này suy ra từ hai tam giác bằng nhau ΔMDB = ΔAEN (c.g.c) vì MD = AE, BD = EN (tính chất đoạn chắn).

- ***Lời bình :*** Cũng là chứng minh tam giác cân ta xét bài toán sau:

"Cho tam giác DEF vuông tại D có DE < DF và đường cao DH. Trên đoạn HF lấy điểm I sao cho HI = HE. Từ F kẻ FK ⊥ DI. Chứng minh ΔDHK cân."

Cách giải như sau :

Gọi G là giao điểm của DH và KF (hình 95).



H95

Ta có $\widehat{D}_1 = \widehat{F}_1$ (cùng phụ với góc E),

mà $\widehat{D}_1 = \widehat{D}_2$ (do ΔDEI cân)

$\widehat{D}_2 = \widehat{F}_2$ (cùng phụ với góc DIH)

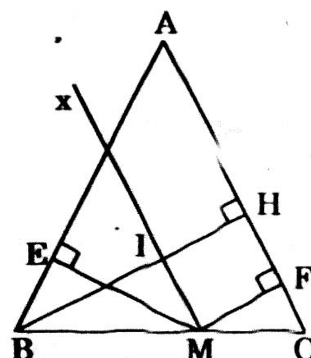
nên $\widehat{F}_1 = \widehat{F}_2$.

Xét ΔDHF = ΔGHF (g.c.g) suy ra HD = HG.

Trong tam giác vuông DKG, trung tuyến KH ứng với cạnh huyền DG bằng nửa cạnh huyền, tức là KH = HD = HG.

Vậy tam giác DHK cân.

14. (Hình 96).



H.96

Kẻ Mx // AC cắt BH tại I, ta có IH = MF (1) (tính chất đoạn chắn) và $\widehat{xMB} = \widehat{ACB}$. Nhưng $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ (ΔABC cân) nên $\widehat{xMB} = \widehat{ABC}$.

Xét hai tam giác vuông BIM và MEB có cạnh huyền BM chung và $\widehat{xMB} = \widehat{ABC}$ nên chúng bằng nhau, suy ra BI = ME (2).

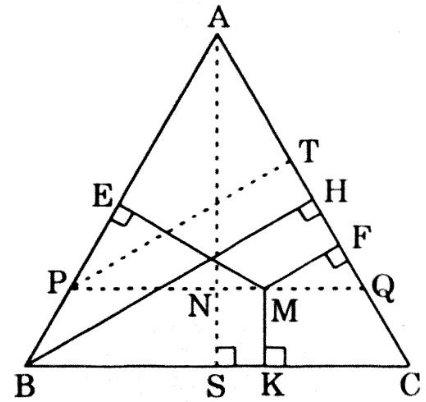
Cộng từng vế (1) và (2) được :

IH + BI = MF + ME, hay BH = ME + MF.

- ***Lời bình :***

a) Nếu thay ΔABC cân bởi ΔABC đều thì bài toán vẫn đúng. Bây giờ thay ΔABC cân bởi *"ΔABC đều và cho điểm M nằm trong tam giác rồi hạ thêm $MK \perp BC$, hãy chứng minh $ME + MF + MK = BH$."*

Ta có cách giải sau (hình 97) :



H.97

Qua M kẻ MQ // BC, ta vẫn có ΔAPQ đều. Hạ $AS \perp BC$ thì $AS = BH$, lại có $NS = MK$, $PT = AN$. Ta trở lại bài toán đã cho, tức là $ME + MF = PT = AN$.

Từ đó : $ME + MF + MK = AN + NS$

$= AS = BH$.

b) Nếu cho điểm M nằm trên đường cao BH chẳng hạn thì ta vẫn có kết quả

$$ME + MF + MK = BH.$$

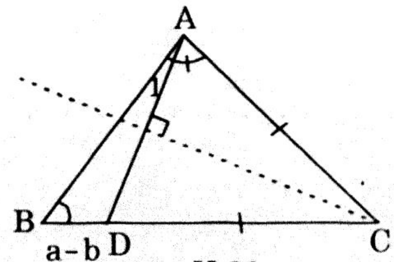
Còn nếu M trùng với B thì $MK = ME = 0$, hoặc nếu M trùng với C thì $MK = MF = 0$, ta vẫn có $ME + MF + MK = BH$.

15. a) *Phân tích :* Giả sử ΔABC đã dựng được (hình 98). Trên cạnh BC đặt đoạn $CD = CA$ thì $BD = BC - DC = BC - CA = a - b$.

Trong ΔADC cân, góc ở đáy $\widehat{ADC} = \dfrac{180^\circ - \widehat{C}}{2} = 90^\circ - \dfrac{\widehat{C}}{2}$.

Vậy góc bù với nó $\widehat{ADB} = 180^\circ - \left(90^\circ - \dfrac{\widehat{C}}{2}\right) = 90^\circ + \dfrac{\widehat{C}}{2}$.

b) *Cách dựng :* Dựng ΔBDA trong đó $BD = a - b$, $\widehat{B}$ đã cho, $\widehat{ADB} = 90^\circ + \dfrac{\widehat{C}}{2}$ (góc C biết được vì $\widehat{C} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B})$. Dựng đường trung trực của AD, cắt BD kéo dài tại C. Nối AC ta được ΔABC cần dựng.



H.98

c) *Chứng minh :* Ta có $BD = BC - DC$, nhưng C nằm trên trung trực của AD nên $CD = CA$ và $BD = BC - AC = a - b$.

Góc B là góc đã cho, còn $\widehat{BAC} = \widehat{A}_1 + \widehat{DAC} = \widehat{A}_1 + \widehat{ADC}$,

nhưng $\widehat{A}_1 = 180^\circ - \left(\widehat{B} + 90^\circ + \dfrac{\widehat{C}}{2}\right)$, mà $\widehat{DAC} = \widehat{ADC} = 90^\circ - \dfrac{\widehat{C}}{2}$,

do đó $\widehat{BAC} = 180^\circ - \left(\widehat{B} + 90^\circ + \dfrac{\widehat{C}}{2}\right) = 180^\circ - \widehat{B} - \widehat{C} = 180^\circ - (\widehat{B} + \widehat{C})$

$=$ góc cho trước.

d) *Biện luận :* Muốn bài toán dựng được thì $\hat{A} > \hat{B}$ và $\hat{A} + \hat{B} < 180^\circ$. Với điều kiện này thì bài toán luôn có 1 nghiệm hình.

- **Lời bình :** Tương tự, ta hãy giải bài toán sau : *"Dựng ΔABC biết : góc C, cạnh AB = c và hiệu hai cạnh BC – AC = a – b."*

Cách giải như sau :

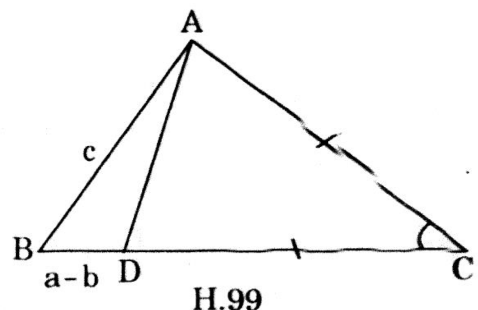
a) *Phân tích :* Giả sử ΔABC đã dựng được (hình 99). Trên CB đặt đoạn CD = CA, ta có BD = a – b.

Trong ΔACD cân thì $\widehat{ADC} = \dfrac{180^\circ - \hat{C}}{2} = 90^\circ - \dfrac{\hat{C}}{2}$.

Góc bù với nó $\widehat{ADB} = 180^\circ - \left(90^\circ - \dfrac{\hat{C}}{2}\right) = 90^\circ + \dfrac{\hat{C}}{2}$.

b) *Cách dựng :* Dựng ΔABD trong đó $\widehat{ADB} = 90^\circ + \dfrac{\hat{C}}{2}$, BD = a – b, AB = c.

Dựng trung trực của AD cắt BD kéo dài tại C. Nối AC ta được ΔABC phải dựng.



H.99

c) *Chứng minh* (dành cho bạn đọc).

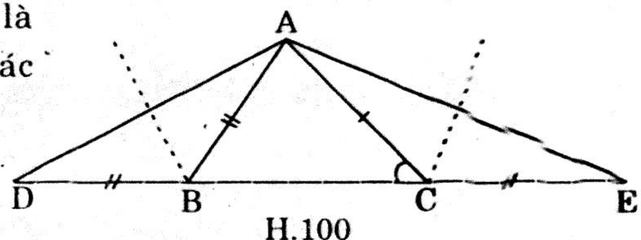
d) *Biện luận :* Muốn bài toán dựng được thì $\hat{C} < 180^\circ$ (vì muốn có ΔABC thì trước hết phải dựng được ΔABD mà muốn dựng tam giác này thì $\widehat{ADB} = 90^\circ + \dfrac{\hat{C}}{2}$ hay $\hat{C} < 180^\circ$) và $c > |a - b|$.

Với hai điều kiện này, bài toán luôn có 1 nghiệm hình.

16. a) *Phân tích :* Giả sử ΔABC đã dựng được (hình 100). Kéo dài về hai phía của BC các đoạn CE = AC = b, BD = AB = c.

Nối EA, DA ta có $\hat{B}$ và $\hat{C}$ là các góc ngoài của hai tam giác cân ABD và ACE nên :

$\widehat{ADB} = \dfrac{\hat{B}}{2}$, $\widehat{AEC} = \dfrac{\hat{C}}{2}$.



H.100

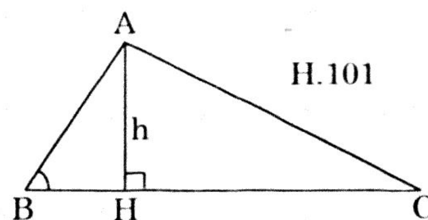
Còn DB + BC + CE = DE = a + b + c (chu vi).

b) *Cách dựng :* Trước hết dựng ΔADE trong đó DE = a + b + c (chu vi cho trước), $\widehat{ADB} = \dfrac{\hat{B}}{2}$, $\widehat{AEC} = \dfrac{\hat{C}}{2}$. Ta được ΔABC phải dựng.

c) *Chứng minh* (dành cho bạn đọc).

d) *Biện luận :* Bài toán dựng được khi $\hat{B} + \hat{C} < 180^\circ$ và chỉ có 1 nghiệm hình.

• ***Lời bình :*** Tương tự, *"Dựng ΔABC biết : chu vi, góc $\hat{B}$ và đường cao AH = h."*



Cách dựng như sau (hình 101).

Trước hết dựng tam giác vuông ABH trong đó $\hat{B}$ bằng góc đã cho, AH = h. Như vậy đã có hai đỉnh A, B và cạnh AB = c.

Trên BH kéo dài đặt BM = a + b (vì biết chu vi a + b + c và AB = c thì biết được a + b). Nối AM và dựng trung trực của đoạn thẳng AM cắt BM tại điểm C.

Ta được ΔABC phải dựng.

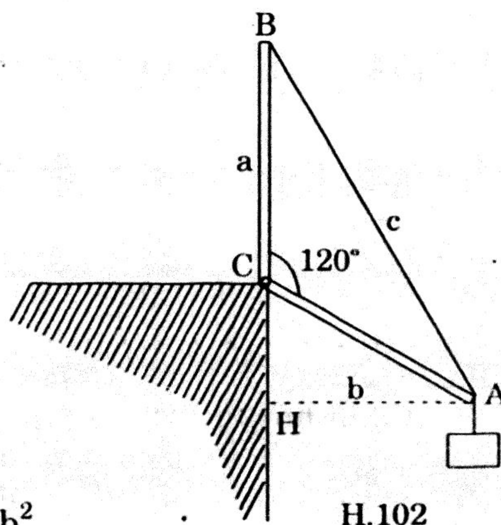
17. So với mặt đất thì đầu ván B cao hơn đầu ván A là 8 – 4 = 4 (m). Theo định lí Pitago ta có :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 10^2 + 4^2 = 100 + 16 = 116\ (m^2).$$

Vậy tấm ván AB dài $\sqrt{116} \approx 10{,}8$ (m).

• ***Lời bình :*** Tương tự, ta giải bài toán sau :

"Ở hình 102 cột a cao 40m, cần cẩu b dài 50m, góc xen giữa a và b là 120°. Tính độ dài của dây kéo c."



Cột a, cần cẩu b và dây kéo c hợp thành ΔABC trong đó BC = a, CA = b, AB = c và $\widehat{BCA} = 120^\circ$.

Gọi CH là hình chiếu của CA trên BC, ta có ngay $\widehat{ACH} = 60^\circ$. Do đó :

$$CH = \frac{1}{2}CA = \frac{b}{2}.$$

Xét tam giác vuông AHC, theo định lí Pitago ta có thể viết :

$$AH^2 = CA^2 - CH^2 = b^2 - \frac{b^2}{4} = \frac{3b^2}{4}$$

$$BH^2 = (BC + CH)^2 = a^2 + ab + \frac{b^2}{4}.$$

Trong tam giác vuông AHB ta lại có thể viết :

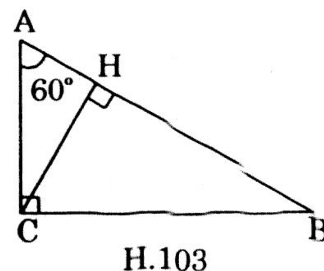
$$AB^2 = AH^2 + BH^2 = a^2 + ab + b^2 = 1600 + 2000 + 2500 = 6100.$$

Từ đó $AB = \sqrt{6100} = \sqrt{61}.\sqrt{100} = 10\sqrt{61} \approx 78$ (m).

18. Gọi H là hình chiếu của C trên AB (hình 103).

a) Xét tam giác vuông CHA (vuông tại C), do $\hat{A} = 60^\circ$

nên cạnh AH = $\frac{1}{2}$AC = 4 (cm).



H.103

b) Tương tự, trong tam giác vuông ACB (vuông tại C) do $\widehat{A} = 60^o$ nên :

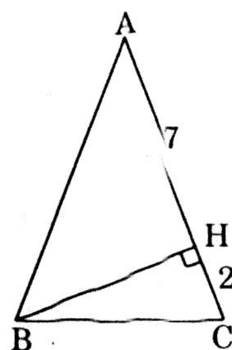
$$AB = 2AC = 2.8 = 16 \text{ (cm)}.$$

Vậy hình chiếu cạnh AC trên cạnh huyền dài 4cm và cạnh huyền AB dài 16cm.

• ***Lời bình :*** Tương tự, ta có bài toán sau :

"Cho tam giác cân ABC tại đỉnh A, đường cao BH chia cạnh bên AC thành hai đoạn dài 7cm và 2cm. Tính cạnh đáy BC của tam giác cân."

Theo đề bài ta có AB = AC = 9cm (hình 104).



H.104

Theo định lí Pitago thì :

$BH^2 = AB^2 - AH^2$ (xét tam giác vuông AHB)

$BH^2 = BC^2 - HC^2$ (xét tam giác vuông BHC).

Suy ra : $BC^2 - HC^2 = AB^2 - AH^2$ (vì cùng bằng BH^2)

hay $BC^2 - 2^2 = 9^2 - 7^2$,

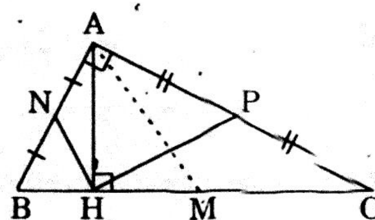
tức là $BC^2 = 81 - 49 + 4 = 36$.

Vậy cạnh đáy BC = $\sqrt{36}$ = 6 (cm).

19. Ta biết rằng : trong một tam giác vuông, trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền, nên trong hai tam giác vuông AHB và AHC ta có (hình 105) :

AB = 2HN = 6cm;

AC = 2HP = 8cm.



H.105

Cạnh huyền BC của tam giác vuông ABC là :

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{36 + 64}$$

$$= \sqrt{100} = 10 \text{ (cm)}$$

Vậy trung tuyến AM ứng với cạnh huyền BC là :

$$AM = \frac{1}{2}BC = 5cm.$$

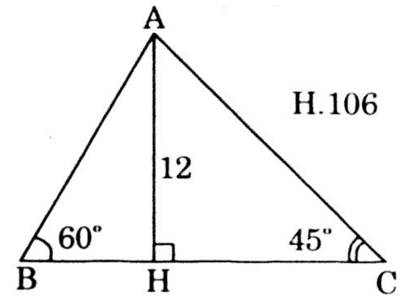
• ***Lời bình :*** Tương tự, ta có bài toán sau :

"Đường cao AH của tam giác ABC dài 12cm, các góc ở đáy của tam giác là $\widehat{B} = 60^o$, $\widehat{C} = 45^o$. Tính các cạnh của tam giác."

Tam giác AHC vuông cân (hình 106) nên HC = HA = 12cm

và $AC^2 = AH^2 + HC^2 = 2.144,$

từ đó $AC = 12\sqrt{2} \approx 16,9$ (cm).



Tam giác vuông AHB bằng nửa tam giác đều mà cạnh là AB (vì $\hat{B} = 60°$)

nên $AB^2 = AH^2 + BH^2 = 12^2 + \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2$

hay $\dfrac{3AB^2}{4} = 12^2.$

Từ đó $AB^2 = \dfrac{12^2.2^2}{3}$, vậy $AB = \dfrac{12.2}{\sqrt{3}} = 8\sqrt{3} \approx 13,8$ (cm)

và $BH = \dfrac{1}{2}AB = 4\sqrt{3} \approx 6,9$ (cm)

$BC = BH + HC = 4(3 + \sqrt{3}) \approx 18,9$ (cm).

Vậy tam giác ABC có ba cạnh gần bằng :

$AB \approx 13,8$cm; $AC \approx 16,9$cm; $BC \approx 18,9$cm.

D. ĐỐ BẠN GIẢI ĐƯỢC

1. Dùng các dấu + và – xen vào giữa các chữ số để được số 100 :

a) 1 2 3 4 5 6 7 8 9 (3 dấu hoặc 6 dấu)

b) 9 8 7 6 5 4 3 2 1 (4 dấu hoặc 7 dấu).

2. Thế kỉ 20 có 6 năm là số nguyên tố, đó là những năm nào ? (ví dụ năm 1973).

§11. CÁC ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY TRONG TAM GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

1. Quan hệ giữa các yếu tố trong tam giác

a) Trong một tam giác, góc đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn

b) Trong một tam giác, cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn.

c) Trong các đường xiên và đường vuông góc kẻ từ một điểm ở ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó, đường vuông góc là đường ngắn nhất.

d) Trong hai đường xiên kẻ từ một điểm ở ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó :

- Đường xiên nào có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn.
- Đường xiên nào lớn hơn thì có hình chiếu lớn hơn.
- Nếu hai đường xiên bằng nhau thì hai hình chiếu bằng nhau và ngược lại, nếu hai hình chiếu bằng nhau thì hai đường xiên bằng nhau.

e) Bất đẳng thức tam giác : Trong một tam giác, độ dài một cạnh bao giờ cũng lớn hơn hiệu và nhỏ hơn tổng các độ dài của hai cạnh còn lại.

2. Các đường đồng quy của tam giác

a) Ba đường trung tuyến của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm đó cách mỗi đỉnh một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ độ dài đường trung tuyến đi qua đỉnh ấy. Điểm đó gọi là trọng tâm của tam giác.

b) Ba đường phân giác của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm này cách đều ba cạnh của tam giác, và là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác.

c) Ba đường trung trực của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm này cách đều ba đỉnh của tam giác, và là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác.

d) Ba đường cao của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm này gọi là trực tâm của tam giác.

e) Trong một tam giác cân, trung trực ứng với cạnh đáy đồng thời là phân giác, đường cao, trung trực cùng xuất phát từ đỉnh đối diện với cạnh đó.

g) Trong một tam giác đều, trung trực, trực tâm, điểm cách đều ba đỉnh và điểm cách đều ba cạnh là 4 điểm trùng nhau.

B. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

1. Cho tam giác DEF (DE < DF) và trung tuyến DM. Chứng minh rằng $\widehat{EDM} > \widehat{FDM}$, từ đó suy ra tia phân giác của góc D nằm trong $\widehat{EDM}$.

2. Cho tam giác DEF và trung tuyến DM. Chứng minh rằng $\widehat{EDM}$ sẽ lớn hơn, bằng hay nhỏ hơn $\widehat{MDF}$ tùy theo $\widehat{DME}$ là góc nhọn, góc vuông hay góc tù.

3. Cho tam giác MNP và đường cao MH. Chứng minh rằng :

a) $MH < \dfrac{MN + MP}{2}$.

b) Tổng ba đường cao nhỏ hơn chu vi tam giác.

4. Cho hai điểm B và C nằm trên đoạn thẳng AD. Chứng minh rằng nếu AB = CD thì với mọi điểm P của mặt phẳng ta luôn có :

$$PA + PD \geq PB + PC.$$

5. Cho tam giác PQR có PM là trung tuyến. Chứng minh rằng PM nhỏ hơn tổng hai cạnh PQ và PR và lớn hơn tổng hai cạnh PQ và PR trừ đi cạnh thứ ba QR.

6. Ba trung tuyến DM, EN và FP của tam giác DEF cắt nhau tại trọng tâm G. Trên tia GM lấy đoạn MH = GM, trên tia GN lấy đoạn NI = GN và trên tia GP lấy đoạn PK = GP. Chứng minh :

a) Hai tam giác DEF và HIK bằng nhau.

b) Điểm G cũng là trọng tâm của ΔHIK.

7. Cho ΔPQR và phân giác PD. Giao điểm ba trung trực của ΔPQR trùng với trọng tâm G của ΔPQD. Tính các góc của ΔPQR.

8. Cho ba đường thẳng phân biệt cùng đi qua một điểm O. Điểm M nằm trên một trong ba đường thẳng đó. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có một đỉnh là M và các đường cao nằm trên các đường thẳng đã cho.

9. Cho ΔABC vuông tại A có BC = 2AB. Lấy điểm D trên AC sao cho $\widehat{ABD} = \dfrac{1}{3}\hat{B}$, điểm E trên AB sao cho $\widehat{ACE} = \dfrac{1}{3}\hat{C}$. Gọi F là giao điểm của BD và CE, gọi G là điểm mà BC là trung trực của FG và H là điểm mà AC là trung trực của FH. Chứng minh ba điểm H, D, G thẳng hàng.

10. Cho ΔABC cân tại A và đường cao AH. Kẻ HK $\perp$ AB và HI // CK (I thuộc AB).

a) Chứng minh I là trung điểm của BK.

b) Gọi F là trung điểm của HK, tia IF cắt AH tại E. Chứng minh IE $\perp$ AH.

c) Chứng minh AF $\perp$ CK.

11. Ba con ruồi đậu trên ba cạnh của ΔABC sao cho trọng tâm của tam giác mà đỉnh là ba con ruồi vẫn không đổi. Chứng minh rằng trọng tâm của "tam giác ruồi" này trùng với trọng tâm ΔABC, biết rằng một trong ba con ruồi bò qua tất cả các cạnh của tam giác.

12. Trong tam giác đều ABC lấy các điểm K, L, M sao cho : $\widehat{KAB} = \widehat{LBA} = 15^\circ$, $\widehat{MBC} = \widehat{KCB} = 20^\circ$, $\widehat{LCA} = \widehat{MAC} = 25^\circ$. Tính các góc của ΔKLM.

13. Dựng tam giác ABC biết : góc A, phân giác AD = p của nó và đường cao AH = h.

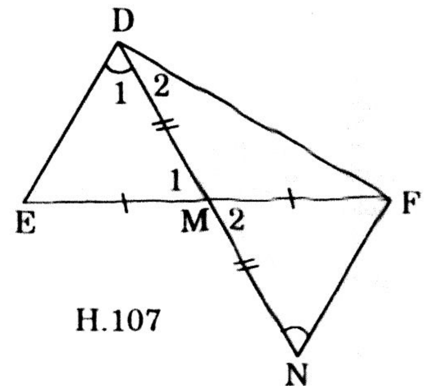
14. Dựng tam giác ABC biết : cạnh BC = a, và hai trung tuyến BM = m, CN = n.

C. CÁCH GIẢI VÀ LỜI BÌNH

1. (Hình 107).

Hai góc D_1 và D_2 nằm trong hai tam giác khác nhau nên chưa có sự liên hệ với nhau. Do đó cần đưa chúng về trong một tam giác.

Muốn thế, trên tia đối của tia MD ta lấy đoạn MN = MD, để xét các góc trong ΔDFN.



H.107

Xét hai tam giác DEM và FNM có :

MD = MN,

$\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$ (đối đỉnh),

ME = MF (gt)

nên chúng bằng nhau (c.g.c).

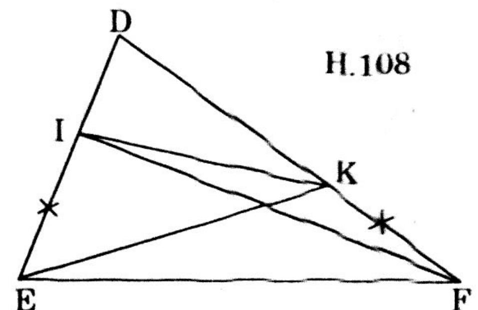
Suy ra $\widehat{D}_1 = \widehat{N}$ và FN = DE.

Trong ΔDFN ta có FN = DE < DF (gt), suy ra $\widehat{FNM} > \widehat{D}_2$ hay $\widehat{D}_1 > \widehat{D}_2$. Do đó tia phân giác của góc D nằm trong góc EDM.

- ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán tương tự sau :

"Cho ΔDEF (DE < DF). Trên hai cạnh DE và DF lấy hai điểm I và K sao cho IE = KF. Hãy so sánh hai đoạn IF và BK, hai góc EIK và FKI."

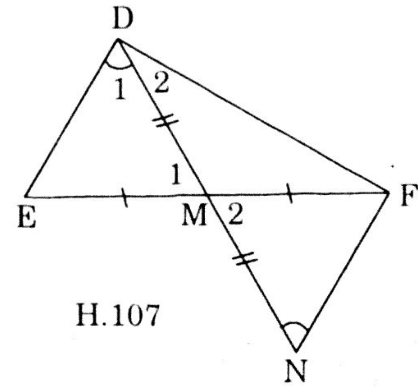
Cách giải như sau (hình 108) :



a) Do DE < DF nên $\widehat{F} < \widehat{E}$. Xét hai tam giác IEF và EKF có hai cặp cạnh tương ứng bằng nhau (IE = KF (gt) và EF chung) trong đó $\widehat{E} > \widehat{F}$ nên IF > BK.

b) Xét tiếp hai tam giác IEK và IKF có hai cặp cạnh tương ứng bằng nhau (IE = KF và IK chung) trong đó EK < IF nên $\widehat{EIK} < \widehat{FKI}$.

2. Lấy lại hình 107 của bài 1.



a) Xét $\Delta DME = \Delta NMF$ (c.g.c), suy ra $\widehat{D_1} = \widehat{N}$ và DE = FN. Nếu $\widehat{DME}$ nhọn thì $\widehat{DMF}$ tù. Từ hai tam giác có hai cặp cạnh tương ứng bằng nhau DME và DMF (ME = MF (gt) và DM chung), suy ra DF > DE hay DF > FN.

Trong ΔDFN ta có $\widehat{N} > \widehat{D_2}$ mà $\widehat{N} = \widehat{D_1}$ nên $\widehat{D_1} > \widehat{D_2}$.

b) Nếu $\widehat{DME}$ vuông thì ΔDEF cân vì có trung tuyến DM cũng là đường cao, là phân giác nên $\widehat{D_1} = \widehat{D_2}$.

c) Nếu $\widehat{DME}$ tù thì lí luận tương ứng như câu a ta suy ra : $\widehat{D_1} < \widehat{D_2}$.

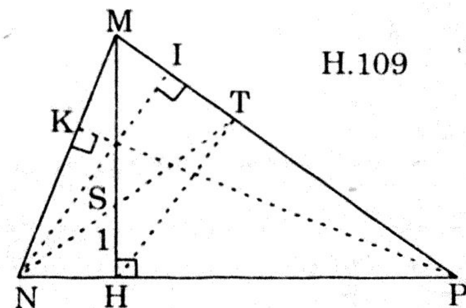
- ***Lời bình :*** Xét thêm câu hỏi sau :

"Chứng minh trung tuyến DM nhỏ hơn nửa tổng hai cạnh còn lại", tức là $DM < \dfrac{DE + DF}{2}$ (*).

Bất đẳng thức (*) có thể viết : $DM < \dfrac{DE}{2} + \dfrac{DF}{2}$, điều này gợi cho ta tìm quan hệ giữa ba cạnh của một tam giác. Đó là ΔDFN ở trên.

Ta đã có DE = FN, nên xét ΔDEN có thêm DN = 2DM, suy ra ngay DN < DF + FN hay 2DM < DE + DF, tức là $DM < \dfrac{DE}{2} + \dfrac{DF}{2}$.

3. a) Ta có MH là đường vuông góc và MN, MP là các đường xiên nên MH < MN và MH < MP (hình 109).



Suy ra 2MH < MN + MP

hay $MH < \dfrac{MN + MP}{2}$.

b) Ta phải chứng minh MH + NI + PK < MN + MP + NP.

Theo câu a ta lần lượt có :

$$MH < \frac{MN + MP}{2}; \quad NI < \frac{MN + NP}{2}; \quad PK < \frac{MP + NP}{2}.$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức này được :

$$MH + NI + PK < \frac{2(MN + MP + NP)}{2} = MN + MP + NP.$$

- ***Lời bình :*** Xét thêm câu hỏi sau đây :

"Lấy điểm S trên đường cao MH. Đường thẳng NS cắt cạnh MP ại I, MN < MP. Chứng minh rằng SN < SP và SI < HI."

Cách giải như sau :

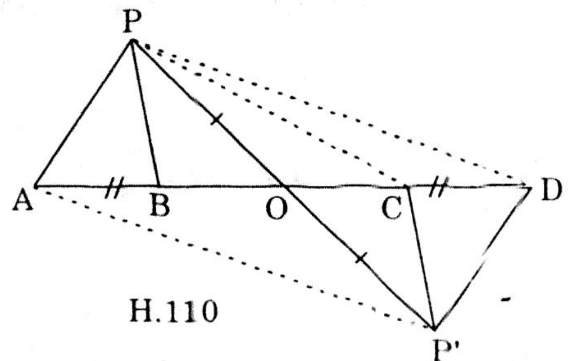
a) Ta có HN và HP theo thứ tự là hình chiếu của các cạnh MN và MP trên cạnh NP.

Từ MN < MP suy ra HN < HP. Ta lại thấy SN và SP cũng có hình chiếu theo thứ tự trên NP là HN và HP.

Do đó từ HN < HP suy ra ngay SN < SP.

b) Xét ΔSHN vuông ta có $S_1 < 90^o$, suy ra góc kề bù $\widehat{HSI} > 90^o$. Vì mỗi tam giác chỉ có nhiều nhất là một góc tù và đó phải là góc lớn nhất nên $\widehat{HSI} > \widehat{SHI}$. Suy ra SI < HI.

4. Nếu điểm P nằm trên đường thẳng AD thì đó là điều hiển nhiên. Do đó ta xét trường hợp P không nằm trên AD (hình 110). Gọi O là trung điểm của AD. Kéo dài PO một đoạn OP' = PO và xét hai tam giác APO và DP'O.



H.110

Ta có ΔAPO = ΔDP'O (c.g.c) (vì OA = OD, OP = OP' và $\widehat{AOP} = \widehat{P'OD}$). Suy ra hai góc A và D bằng nhau (so le trong) nên AP // P'D và AP = P'D. Tương tự AP' = PD.

Lại xét hai tam giác nữa bằng nhau là ΔPOB = ΔCOP', ta cũng có :

BP = CP', PC = BP'.

Vậy AP + PD = AP' + P'D > P'B + P'C = BP + PC.

- ***Lời bình :*** Tương tự, ta xét thêm bài toán sau :

"Cho bốn điểm A, B, C, D. Với mọi điểm P ta có PA + PD ≥ PB + PC. Chứng minh rằng các điểm B và C nằm trên đoạn thẳng AD và AB = CD."

Sau đây là cách giải :

Trước hết do P là một điểm bất kì nên :

nếu P ≡ A thì ta có AD ≥ AB + AC,

còn nếu P ≡ B thì AD ≥ BD + DC.

Cộng từng vế hai bất đẳng thức này được :

$$2AD \geq AB + AC + BD + CD \quad (*)$$

Mặt khác ta luôn có : AD ≤ AC + CD và AD ≤ AB + BD. Đẳng thức chỉ xảy ra ở mỗi bất đẳng thức khi ba điểm A, C, D thẳng hàng. Cộng

từng vế ta được : $2AD \le BD + AB + AC + CD.$

Kết hợp với (*) được : $2AD = BD + AB + AC + CD.$

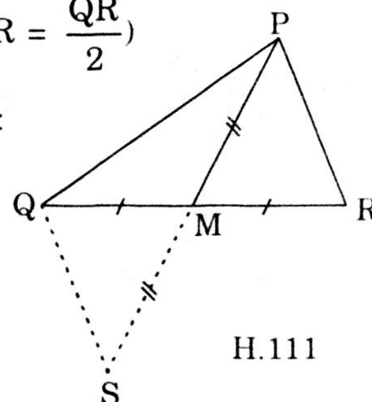
Suy ra ngay là bốn điểm A, B, C, D thẳng hàng và tất cả các bất đẳng thức trên đều trở thành đẳng thức. Vậy hai điểm B và C nằm trên đoạn thẳng AD và AB = CD.

5. Xét hai tam giác PQM và PRM (hình 111) ta có :

$$PQ < PM + QM, \qquad PR < PM + MR.$$

Từ đó suy ra :

$$\frac{PQ + PR - QR}{2} < PM \quad (1) \ (\text{vì } QM = MR = \frac{QR}{2})$$



H.111

Kéo dài PM một đoạn MS = PM, từ ΔPQR ta có :

$$PM < \frac{PQ + PR}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có ngay :

$$\frac{PQ + PR - QR}{2} < PM < \frac{PQ + PR}{2}.$$

- ***Lời bình :*** Dựa vào bài toán này, hãy chứng minh rằng :

"Trong một tam giác, tổng ba trung tuyến lớn hơn nửa chu vi nhưng nhỏ hơn chu vi của tam giác đó."

Thật vậy, để cho gọn ta gọi ba cạnh của tam giác PQR là p, q, r và ba trung tuyến là m_p, m_q, m_r. Theo đề bài trên ta có :

$$\frac{q + r - p}{2} < m_p < \frac{q + r}{2} ;$$

$$\frac{r + p - q}{2} < m_q < \frac{r + p}{2} ;$$

$$\frac{p + q - r}{2} < m_r < \frac{p + q}{2}$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức kép này được :

$$\frac{p + q + r}{2} < m_p + m_q + m_r < p + q + r.$$

6. a) Ta có PN là đường trung bình trong ΔDEF (hình 112) nên

$$PN = \frac{1}{2}EF \quad (1)$$

Còn PN là đường trung bình trong ΔGIK nên $PN = \frac{1}{2}KI$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra EF = KI.

Chứng minh tương tự ta có :

HI = DE, HK = DF.

Vậy $\Delta DEF = \Delta HIK$ (c.c.c).

b) Từ câu a ta có KI // EF

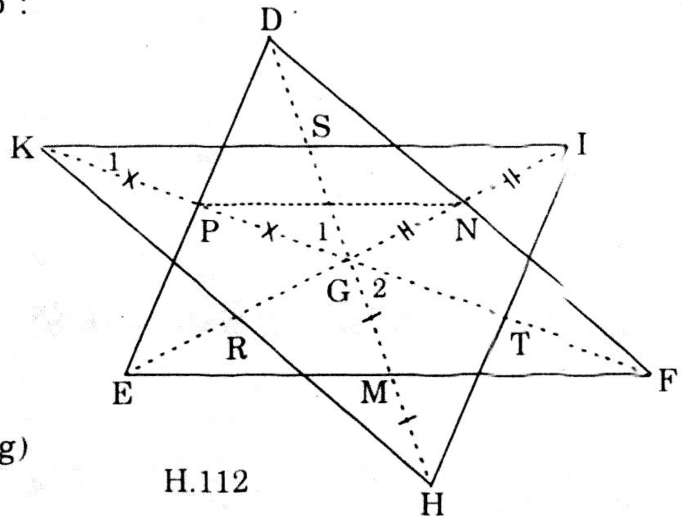
nên $\widehat{K}_1 = \widehat{F}_1$ (so le trong),

mà $\widehat{G}_1 = \widehat{G}_2$ (đối đỉnh)

suy ra KG = GF.

Do đó $\Delta KSG = \Delta GMF$ (g.c.g)

nên KS = MF.



H.112

Từ KI = EF, MF = $\frac{1}{2}$EF, KS = MF, suy ra KS = $\frac{1}{2}$KI.

Như vậy S là trung điểm của KI hay HS là trung tuyến của ΔHIK. Chứng minh tương tự, ta có IR và KT là hai trung tuyến còn lại của ΔHIK. Vậy G cũng là trọng tâm của ΔHIK.

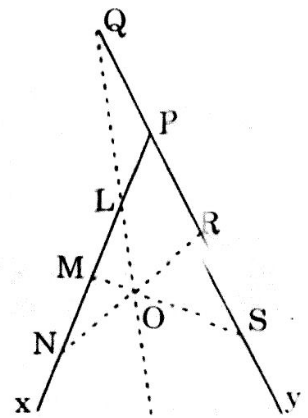
• ***Lời bình :*** Tương tự ta có bài toán sau :

"Cho góc xPy. Trên tia Px lấy ba đoạn PL = LM = MN. Trên tia Py lấy ba đoạn PR = PQ = RS (Q nằm trên tia đối của tia Py). Chứng minh rằng ba đường thẳng QL, MS và NR cùng đi qua một điểm."

Thật vậy, từ đề bài ta suy ra điểm L là trọng tâm của ΔQNR (hình 113), do đó QL cắt NR tại O trung điểm của NR.

Trong ΔPMS, LR là đường trung bình nên LR // MS. Trong ΔLNR, MO là đường trung bình nên MO // LR. Suy ra ba điểm S, O, M thẳng hàng, tức là SM qua giao điểm O của QL và RN.

Vậy ba đường thẳng QL, MS và NR cùng đi qua một điểm.



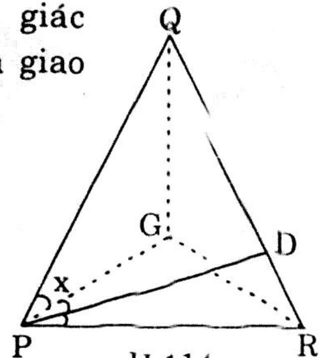
H.113

7. Ta có G là trọng tâm của ΔPQD và cũng là giao điểm ba đường trung trực của ΔPQR (hình 114). Ba tam giác GQP, GQR và GPR là những tam giác cân (vì G là giao ba đường trung trực của ΔPQR nên GP = GQ = GR).

Để cho gọn ta đặt $\widehat{GPQ} = x$ thì ta cũng có :

$$\widehat{GPD} = \widehat{GPQ} = \widehat{GQP} = \widehat{GQR} = \widehat{GRQ} = x.$$

Từ đó $\widehat{PQR} = 2x$ và $\widehat{RPQ} = 2\widehat{DPQ} = 4x$.



H.114

Vì tổng các góc trong ΔPQR bằng 180°, tức là

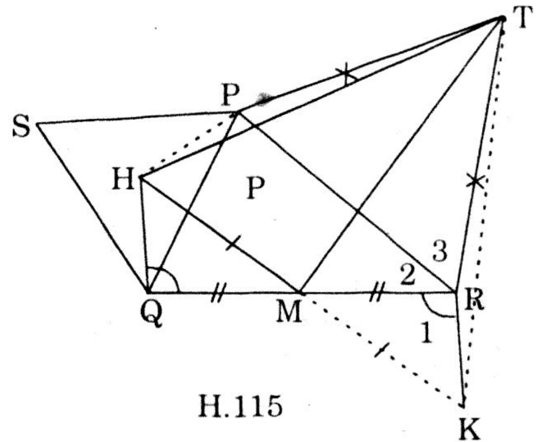
$$\hat{P} + \hat{Q} + \hat{R} = 180^\circ \text{ hay } 4x + 2x + 4x = 10x = 180^\circ, \text{ suy ra } x = 18^\circ.$$

Vậy $\hat{P} = \hat{R} = 18^\circ.4 = 72^\circ$ và $\hat{Q} = 18^\circ.2 = 36^\circ$.

• ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán tương tự về tính các góc của một tam giác :

"Cho ΔPQR. Ở miền ngoài tam giác vẽ hai tam giác đều SPQ và TPR, cả ba tam giác này không có điểm chung ở trong. Tính các góc của ΔMHT, trong đó H là trực tâm của ΔSPQ và M là trung điểm cạnh QR."

Ta có cách giải sau (hình 115).



H.115

Kéo dài HM một đoạn MK = MH. Xét hai tam giác QMH và RMK bằng nhau (c.g.c) ta có QH = RK và $\widehat{HQM} = \widehat{KRM}$.

Trong ΔSPQ đều, H là trực tâm cũng là trọng tâm, là giao ba trung trực, do đó HQ = HP

và $\widehat{HQP} = \widehat{HPQ} = 30^\circ$.

Suy ra $\widehat{HPT} = 90^\circ + \widehat{QPR}$.

Lại có $\widehat{KRT} = 360^\circ - \hat{R}_1 - \hat{R}_2 - \hat{R}_3 = 360^\circ - \hat{Q} - \hat{R} - 30^\circ - 60^\circ$

hay $\widehat{KRT} = 270^\circ - (180^\circ - \hat{P}) = 90^\circ + \widehat{QPR}$. Thành thử $\widehat{HPT} = \widehat{KRT}$.

Xét $\Delta HPT = \Delta KRT$ (c.g.c) ta có : HT = HK và $\widehat{PTH} = \widehat{RTK}$,

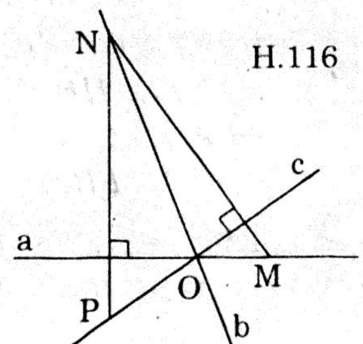
do đó $\widehat{HTK} = 60^\circ$.

Vậy ΔTHK là tam giác đều nên ΔTMH vuông tại M, thành thử :

$$\widehat{MHT} = 60^\circ, \ \widehat{MTH} = 30^\circ.$$

Vậy ΔMHT là nửa tam giác đều có ba góc : $\hat{M} = 90^\circ$, $\hat{H} = 60^\circ$, $\hat{T} = 30^\circ$.

8. Gọi ba đường thẳng a, b, c cùng đi qua O (hình 116).



Giả sử M là điểm nằm trên đường thẳng a. Nếu tam giác có một đỉnh là M và các đường cao nằm trên a, b, c thì các cạnh MN và MP phải tương ứng vuông góc với c và b. Vị trí các đỉnh N và P của tam giác được xác định trên các đường thẳng b và c.

Nếu $b \perp c$ thì các đường thẳng qua M và vuông góc với b và c sẽ song song với các đường thẳng tương ứng c và b. Khi đó không tồn tại tam giác.

• ***Lời bình :*** Xét thêm câu hỏi sau :

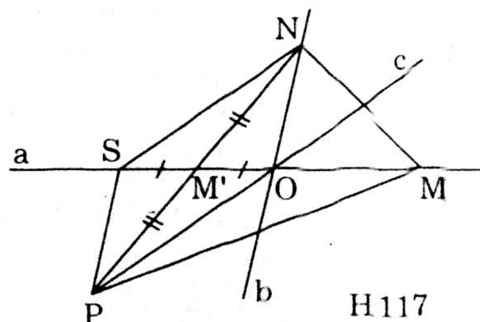
"Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có một đỉnh là M và các trung tuyến nằm trên các đường thẳng đã cho."

Thật vậy, dựng $OM' = \frac{1}{2}OM$ (hình 117), với M' là trung điểm của NP.

Kéo dài MM' một đoạn M'S = M'O ta thấy rằng SN // c, SP // b nên các điểm N và P nằm trên các đường thẳng qua S và song song với c và b.

Khi đó O là giao điểm các trung tuyến trong ΔMNP (vì $M'O = \frac{1}{3}MM'$).

Do đó các đoạn thẳng ON và OP thuộc các trung tuyến của ΔMNP.



H.117

9. Do BC = 2AB nên ΔABC là nửa tam giác đều, do đó $\hat{C} = 30^o$ và $\hat{B} = 60^o$ (hình 118).

Suy ra $\widehat{ABD} = 20^o$ và $\widehat{ACE} = 10^o$.

ΔGHC cân vì CG = CF (do BC là trung trực của FG)

và CF = CH (do AC là trung trực của FH),

mà $\hat{C}_1 + \hat{C}_2 = \hat{C} = 30^o$ nên $\widehat{HCG} = 60^o$.

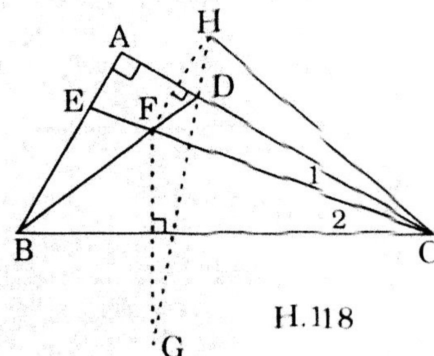
Suy ra ΔGHC đều và $\widehat{GHC} = 60^o$ (1)

Mặt khác, $\widehat{ADB} = 90^o - 20^o = 70^o$

nên $\widehat{ADH} = 70^o$.

Từ đó $\widehat{HDC} = 110^o$ và $\widehat{DCH} = 10^o$.

Vậy $\widehat{CHD} = 180^o - (110^o + 10^o) = 60^o$ (2)



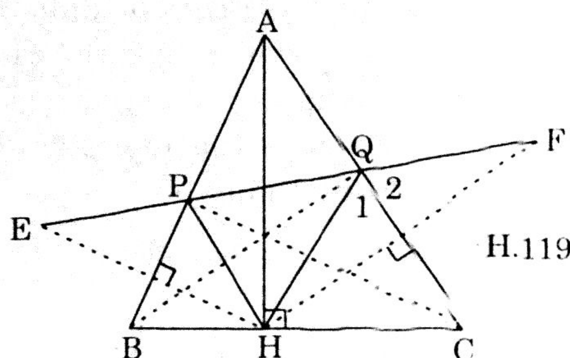
H.118

Từ (1) và (2) suy ra ba điểm H, D, G thẳng hàng.

• ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán về đường trung trực sau :

"Cho ΔABC nhọn có đường cao AH. Lấy các điểm E và F sao cho AB là trung trực của HE, AC là trung trực của HF. Nối EF cắt AB ở P và AC ở Q. Chứng minh PC // EH và QB // FH."

Thật vậy, ta có ΔQHF cân vì $\hat{Q}_1 = \hat{Q}_2$ (hình 119). Do đó AC là phân giác ngoài của ΔHPQ. Suy ra AH là phân giác trong của ΔHPQ



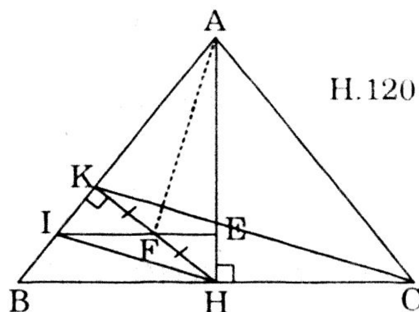
H.119

(AH đi qua giao điểm hai phân giác ngoài của ΔHPQ). Suy ra BC là phân giác ngoài của tam ΔHPQ (vì $BC \perp AH$), mà BC lại cắt AC tại C, do đó PC là phân giác trong của ΔHPQ (vì qua giao điểm của BC và AC).

Vì phân giác trong vuông góc với phân giác ngoài của một góc nên $PC \perp AB$, suy ra CP // EH.

Tương tự ta có $BQ \perp AC$, suy ra BQ // FH.

10. (Hình 120).



a) Đường cao AH trong tam giác cân ABC cũng là trung tuyến nên HB = HC. Trong ΔBKC ta có IK = IB (vì IE // BH nên IF là đường trung bình trong tam giác) hay I là trung điểm của BK.

b) Trong ΔKBH ta đã có IK = IB, KF = FH (gt) nên IF // BH (tính chất đường trung bình của tam giác) hay IE // BH, mà $AH \perp BH$. Suy ra $AH \perp IE$.

c) Trong ΔAIH hai đường cao IE và HK đã cắt nhau tại F thì AF phải là đường cao thứ ba (vì ba đường cao đồng quy), vậy $AF \perp IH$.

Ta có IH // CK, $AF \perp IH$, suy ra $AF \perp CK$.

• ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán tương tự về ba đường cao đồng quy :

"Cho ΔDEF và ba trung trực của ba cạnh DE, DF, EF theo thứ tự tại các trung điểm G, H, I. Trên các trung trực đó về phía ngoài tam giác theo thứ tự lấy các điểm K, L, M sao cho $KG = \frac{DE}{2}$, $LH = \frac{DF}{2}$ và $MI = \frac{EF}{2}$. Chứng minh :

a) Hai tam giác KGH và HIM bằng nhau, suy ra KH bằng và vuông góc với HM.

b) Hai tam giác KHF và MHL bằng nhau, suy ra KF bằng và vuông góc với LM.

c) Ba đường cao của ΔKLM đồng quy".

Trước hết ta vẽ hình (hình 121).

Cách giải như sau :

a) Xét hai tam giác KGH và HIM, trước hết ta chứng minh chúng có $\widehat{KGH} = \widehat{HIM}$.

Thật vậy, vì GH // EF nên $\widehat{G}_1 = \widehat{E}$,

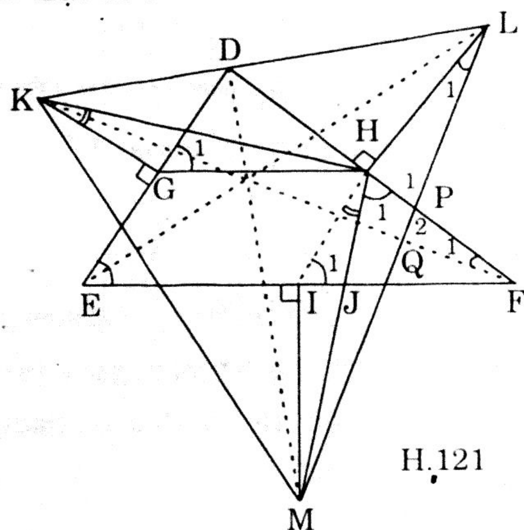
suy ra $\widehat{KGH} = 90^\circ + \widehat{G}_1 = 90^\circ + \widehat{E}$ (1)

Vì IH // DE nên $\hat{I}_1 = \hat{E}$, suy ra $\widehat{HIM} = 90^\circ + \hat{E}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có ngay $\widehat{KGH} = \widehat{HIM}$. Lại có :

$GH = \frac{1}{2}EF$, suy ra GH = IM;

$KG = \frac{1}{2}DE$, suy ra IH = KG.



H.121

Từ ba đẳng thức trên ta có :

$\Delta KGH = \Delta HIM$ (c.g.c),

do đó KH = HM.

Do hai tam giác này bằng nhau nên

$\widehat{KHG} = \widehat{HMI}$

và do GH // EF nên $\widehat{GHM} = \widehat{HIF}$ (so le trong).

Xét tam giác HIM có $\widehat{MIF} = 90^\circ$, nên tổng các góc còn lại bằng 90°, suy ra $\widehat{KHM} = 90^\circ$, tức là KH ⊥ HM.

Vậy KH bằng và vuông góc với HM.

b) Xét hai tam giác KHF và MHL có :

$\widehat{KHF} = \widehat{MHL}$ (vì $\widehat{MHL} = 90^\circ + \hat{H}_1$ và $\widehat{KHF} = 90^\circ + \hat{H}_1$),

KH = HM (câu a)

và FH = HL (bằng $\frac{1}{2}DF$)

nên chúng bằng nhau (c.g.c). Suy ra KF = LM.

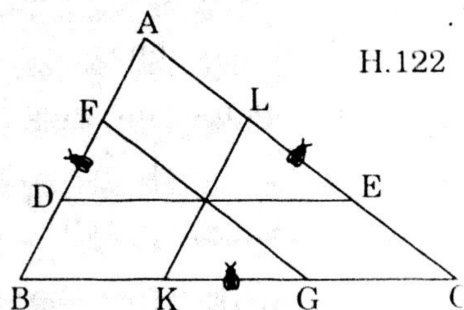
Lại có $\hat{F}_1 = \hat{L}_1$ và $\hat{P}_1 = \hat{P}_2$, mà $\hat{L}_1 + \hat{P}_1 = 90^\circ$ nên $\hat{P}_2 + \hat{F}_1 = 90^\circ$ hay $\widehat{PQF} = 90^\circ$. Vậy QF ⊥ LM hay KF ⊥ LM.

Chứng minh tương tự ta sẽ được : DM ⊥ KL và EL ⊥ KM.

c) Theo trên, trong ΔKLM ta có ba đường cao là MD, KF và LE nên chúng đồng quy.

11. Nếu một con ruồi đậu ở đỉnh A thì trọng tâm "tam giác ruồi" nằm trong ΔADE (hình 122) trong đó $\frac{DE}{BC} = \frac{2}{3}$.

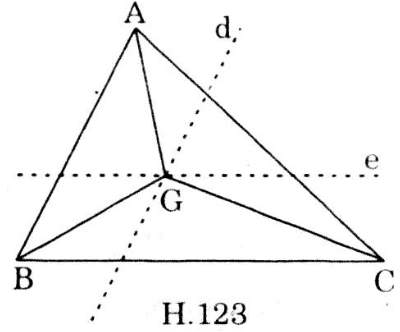
Vì một con ruồi bò qua tất cả các đỉnh nên trọng tâm của "tam giác ruồi" phải thuộc về ba tam giác ADE, BFG, CKL. Ba tam giác này chỉ có một giao điểm duy nhất là trọng tâm của tam giác đã cho.



H.122

• ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán nữa về trọng tâm :

"Cho G là một điểm nằm trong ΔABC sao cho diện tích ba tam giác ABG, BCG và CAG bằng nhau. Chứng minh rằng G là trọng tâm của ΔABC."



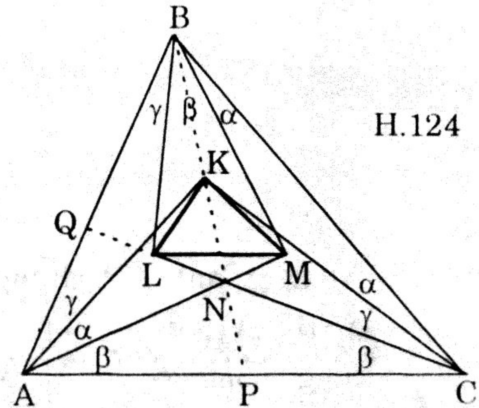
H.123

Thật vậy, qua G kẻ đường thẳng d // AB (hình 123). Theo bài ra diện tích ΔABG bằng $\frac{1}{3}$ diện tích ΔABC. Do đó đường cao hạ từ G xuống AB bằng $\frac{1}{3}$ đường cao hạ từ C xuống AB.

Vì d // AB và đi qua G nên mọi đoạn thẳng nối đỉnh C với một điểm của cạnh AB (trong đó có trung tuyến kẻ từ C tới AB) được d chia thành hai đoạn có tỉ số 2 : 1 (kể từ đỉnh C). Vậy d đi qua trọng tâm của ΔABC.

Đường thẳng e qua G và song song với BC cũng qua trọng tâm ΔABC. Do d và e không trùng nhau nên chúng chỉ có điểm chung là G. Do đó G trùng với trọng tâm ΔABC.

12. Đặt $\alpha = 20^\circ$, $\beta = 25^\circ$, $\gamma = 15^\circ$ (hình 124).



H.124

Thế thì $\alpha, \beta, \gamma < 30^\circ$ và $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$.

$\widehat{KAM} = 60^\circ - \widehat{MAC} - \widehat{KAB} = \alpha$.

Tương tự ta có $\widehat{LBM} = \beta$, $\widehat{KCL} = \gamma$.

Giả sử AM và CL cắt nhau tại N, BN và AC cắt nhau tại P, CL và AB cắt nhau tại Q. Vì AB = BC và AN = NC (hoặc $\widehat{NAC} = \widehat{NCA} = \beta$) nên BP là phân giác của $\widehat{ANC}$ và $\widehat{LMN}$.

Lấy điểm B' nằm trong góc LMN và ở ngoài ΔLMN cách đều ba đường thẳng LN, LM và MN. Điểm này nằm trên đường thẳng NB và các phân giác ngoài của các góc L và M của ΔLMN, do đó :

$$\widehat{LB'M} = 180^\circ - \widehat{B'LM} - \widehat{B'ML} = 180^\circ - \frac{180^\circ - \widehat{NLM}}{2} - \frac{180^\circ - \widehat{NML}}{2}$$

$$= \frac{\widehat{NLM} + \widehat{NML}}{2} = \frac{180^\circ - \widehat{LNM}}{2} = \frac{\widehat{NAC} + \widehat{NCA}}{2} = \beta = \widehat{LBM}.$$

Vậy $B \equiv B'$ và $\widehat{BLM} = \widehat{BLQ} = 180^\circ - \widehat{CQB} - \widehat{ABL}$

$$= \widehat{ABC} + \widehat{BCQ} - \widehat{ABL} = 60^\circ + \alpha + \beta + \gamma = 60^\circ + \alpha.$$

Vì $\widehat{BLC} = 180^\circ - \widehat{LBC} - \widehat{LCB} = 180^\circ - (\alpha + \beta) - (\alpha + \gamma) = 120^\circ - \alpha$

nên $\widehat{MLC} = \widehat{BLC} - \widehat{BLM} = 120^\circ - \alpha - (60^\circ + \alpha) = 60^\circ - 2\alpha$

(nhớ rằng $\alpha < 30^\circ$).

Chứng minh tương tự được : $\widehat{KLM} = 3\beta = 75^\circ$; $\widehat{KML} = 3\gamma = 30^\circ$.

Như thế : $\widehat{KLM} = \widehat{BLC} - \widehat{KLB} - \widehat{MLC}$

$$= (120^\circ - \alpha) - (60^\circ - 2\alpha) - (60^\circ - 2\alpha) = 3\alpha,$$

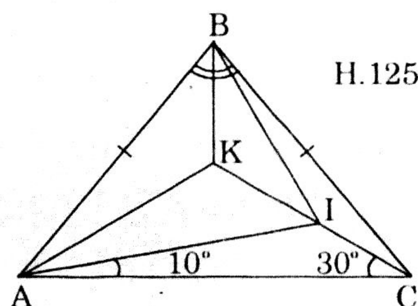
tức là $\widehat{KLM} = 3\alpha = 60^\circ$.

- ***Lời bình :*** Sau đây là bài toán tương tự về tính góc :

"Cho ΔABC với $AB = BC$ và $\widehat{ABC} = 80^\circ$. Lấy một điểm I trong tam giác ấy sao cho $\widehat{IAC} = 10^\circ$ và $\widehat{ICA} = 30^\circ$. Tính góc AIB."

Cách giải như sau (hình 125) :

Phân giác của góc BAI cắt CI tại K, K nằm trên phân giác góc ABC. Thật vậy $\widehat{ABC} = 80^\circ$ (gt)



nên $\widehat{BAC} = \widehat{BCA} = \dfrac{180^\circ - 80^\circ}{2} = 50^\circ$.

Suy ra $\widehat{KAI} = \dfrac{1}{2}\widehat{BAI} = 40^\circ : 2 = 20^\circ$,

do đó $\widehat{KAC} = 20^\circ + 10^\circ = 30^\circ$.

Mặt khác $\widehat{KCA} = 30^\circ$ (gt) nên ΔAKC cân. Hai tam giác cân ABC và AKC có đáy AC chung nên điểm K phải nằm trên phân giác BH của ΔABC, vì nếu không thì từ H trên AC ta kẻ được hai đường HB và HK cùng vuông góc với AC (vô lí !). Mặt khác $\widehat{AIK} = 40^\circ$ (góc ngoài của ΔAIC).

Xét hai tam giác AKB và AKI có :

AK chung, $\widehat{BAK} = \widehat{KAI} = 20^\circ$ và $\widehat{BKA} = \widehat{AKI} = 120^\circ$

nên chúng bằng nhau (g.c.g).

Suy ra AB = AI, tức là ΔBAI cân.

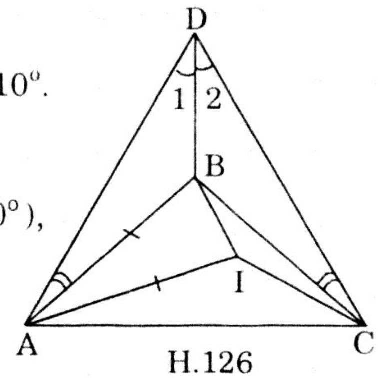
Vì $\widehat{BAI} = 20^\circ + 20^\circ = 40^\circ$ nên $\widehat{AIB} = \widehat{ABI} = \dfrac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$.

* *Ta còn có cách giải khác :*

Vẽ ΔADC đều có cạnh AC sao cho B và D ở cùng phía đối với đường thẳng AC (hình 126). Ta có : $\widehat{DAC} = \widehat{ACD} = \widehat{CDA} = 60^\circ$.

Xét hai tam giác ADC và ABC có AC chung nên các đỉnh nằm trên trung trực của AC do $\Delta ABD = \Delta CBD$ (c.c.c).

Suy ra $\widehat{D}_1 = \widehat{D}_2 = 30^\circ$ và DB vừa là phân giác, vừa là đường cao.



H.126

Theo bài ra $\widehat{BAC} = 50^\circ$ nên $\widehat{BAD} = 60^\circ - 50^\circ = 10^\circ$.

Ta lại có $\Delta ABD = \Delta AIC$

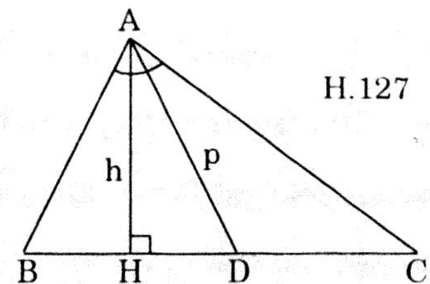
(vì AD = AC, $\widehat{ADB} = \widehat{ACI} = 30^\circ$, $\widehat{DAB} = \widehat{IAC} = 10^\circ$),

suy ra AB = AI.

Trong ΔABI cân góc ở đỉnh A bằng 40° nên các góc ở đáy $\widehat{AIB} = \widehat{ABI} = 70^\circ$.

13. a) *Phân tích :* Giả sử ΔABC đã dựng được (hình 127). Ta thấy ngay có thể dựng được tam giác vuông AHD biết cạnh huyền AD = p, và một cạnh góc vuông AH = h. Hai điểm B và C nằm trên HD kéo dài về hai phía và nằm trên hai cạnh không chung của hai góc bằng $\frac{1}{2}\widehat{A}$ kề nhau có cạnh chung là p.

b) *Cách dựng :* Dựng tam giác vuông AHD trong đó AD = p, AH = h. Dùng DA là một cạnh và A là đỉnh, dựng về hai phía của AD hai góc bằng $\frac{1}{2}\widehat{A}$. Kéo dài HD về hai phía cắt hai cạnh không chung trên tại B và C.

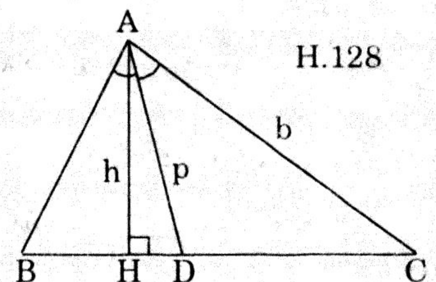


H.127

Tam giác ABC là tam giác phải dựng.

• ***Lời bình :*** Tương tự : *"Dựng ΔABC biết : cạnh AC = b, đường cao AH = h và phân giác AD = p."*

Rõ ràng tam giác vuông AHC có thể dựng được ngay trong đó AC = b, AH = h (hình 128). Dùng A làm tâm, vạch một cung tròn bán kính p cắt HC tại D. Dùng A làm đỉnh và AD làm một cạnh dựng một góc kề và bằng góc CAD, cạnh không chung cắt CH kéo dài tại B.



H.128

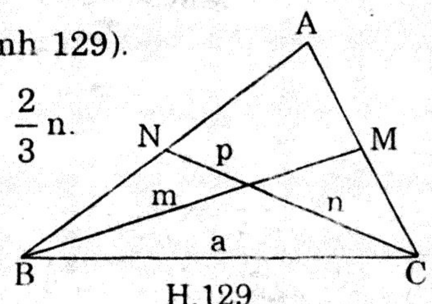
Tam giác ABC là tam giác phải dựng.

14. a) *Phân tích :* Giả sử ΔABC đã dựng được (hình 129).

Ta có P là trọng tâm nên $BP = \frac{2}{3}m$, $CP = \frac{2}{3}n$.

Từ đó ta có cách dựng sau.

b) *Cách dựng :* Dựng ΔPBC biết ba cạnh



H.129

$BC = a$, $BP = \frac{2}{3}m$, $CP = \frac{2}{3}n$. Trên BP kéo dài đặt đoạn $PM = \frac{1}{3}m$, trên CP kéo dài đặt đoạn $PN = \frac{1}{3}n$. Nối BN và CM rồi kéo dài cho chúng gặp nhau tại A.

Tam giác ABC là tam giác phải dựng.

c) *Chứng minh :* Trong ΔABC giao điểm P của các đoạn thẳng BM, CN tương ứng cách B và C là $\frac{2}{3}$, cách M và N là $\frac{1}{3}$ của mỗi đường, nên BM và CN chính là hai trung tuyến phát xuất từ B và C.

Ngoài ra, $BM = BP + PM = \frac{2}{3}m + \frac{1}{3}m = m$,

$CN = CP + PN = \frac{2}{3}n + \frac{1}{3}n = n$,

còn đoạn $BC = a$ do ta dựng.

d) *Biện luận :* Muốn dựng được ΔABC thì phải dựng được ΔPBC. Mà muốn có ΔPBC thì phải có :

$$\left|\frac{2}{3}m - \frac{2}{3}n\right| < a < \frac{2}{3}m + \frac{2}{3}n,$$

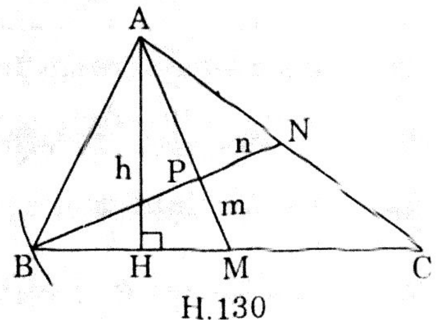
hay $\frac{2}{3}|m - n| < a < \frac{2}{3}(m + n)$, tức là $|m - n| < \frac{2}{3}a < m + n$.

• ***Lời bình :*** Tương tự : *"Dựng tam giác ABC biết : trung tuyến AM = m, trung tuyến BN = n và đường cao AH = h."*

Trước hết ta dựng tam giác vuông AHM trong đó $AH = h$, $AM = m$ (hình 130).

Lấy điểm P trên AM mà $PM = \frac{1}{3}m$.

Dùng P làm tâm vạch một cung tròn bán kính bằng $\frac{2}{3}m$ cắt MH kéo dài tại B. Trên HM kéo dài đặt $MC = MB$.

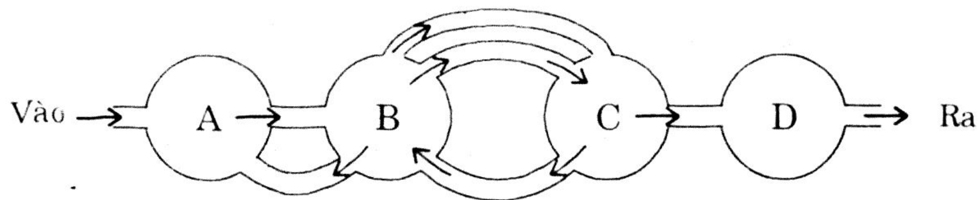


H.130

Tam giác ABC là tam giác phải dựng.

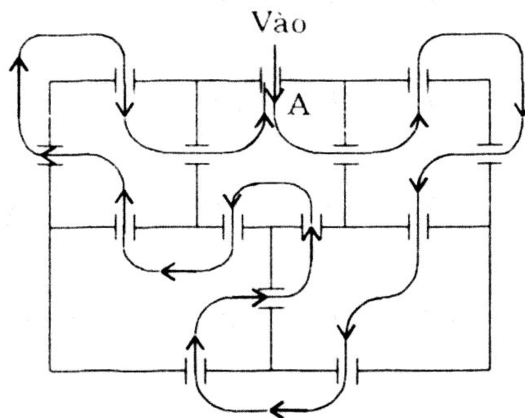
GIẢI ĐÁP CÁC CÂU : "ĐỐ BẠN GIẢI ĐƯỢC"

§1. **1.** Khu vui chơi giải trí ngoài trời (hình 131).



H.131

2. Tham quan khu triển lãm (hình 132).



H.132

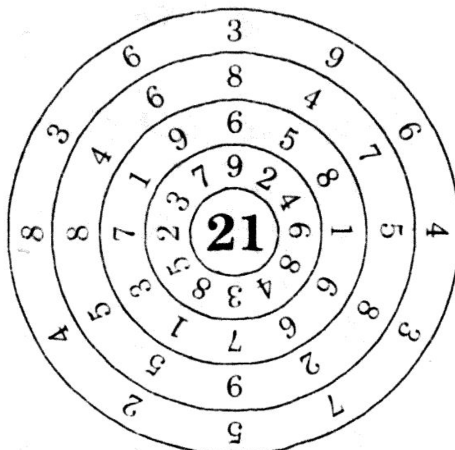
§2. **1.** Biểu thị số 65536 :

$$65536 = 2^{2^{2^{2}}}$$

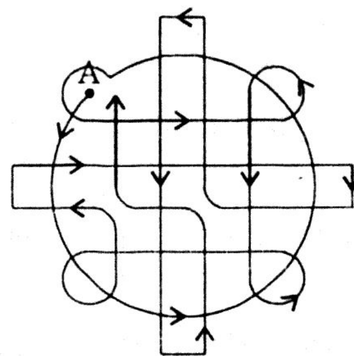
2. a) $\frac{1+2}{3}$; $\frac{3-1}{2}$; $2 - 1^3$. b) $(123456789)^0$ hoặc $\frac{1234567890}{1234567890}$.

§3. **1.** Bốn vòng vành khuyên (hình 133).

2. Vẽ hình chỉ bằng một nét (hình 134).



H.133



H.134

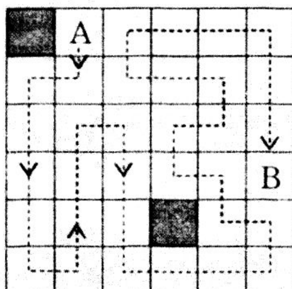
§4. Dùng dấu các phép tính và dấu ngoặc, ta lần lượt có :

a) $(1.2.3 + 4) : 5 = 2$ b) $(1 + 2).3 + 4 - 5 - 6 = 2$

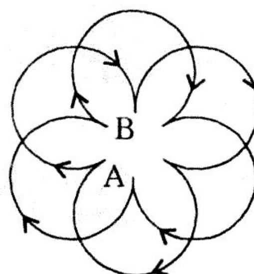
c) $1.2.3 + 4 + 5 - 6 - 7 = 2$ d) $(1 + 23) : 4 + 5 + 6 - 7 - 8 = 2$.

§5. **1.** Chỉ qua mỗi ô một lần (hình 135).

2. Bông hoa cánh kép (hình 136).



H.135



H.136

§6. **1.** Biểu thị số : 1000 :

a) $999\frac{999}{999}$ (= 1000) b) $333.3 + \frac{3}{3}$

c) $5.5.5.5 + 5.5.5 + 5.5.5 + 5.5.5$

d) $90.5.4 : 2 + 87 + 16 - 3$ hoặc $90.4.3 - 8.6 - 7.5 + 2 + 1$.

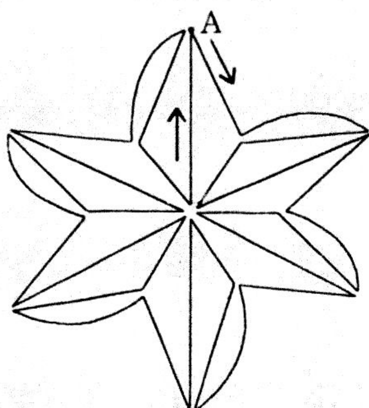
2. Biểu thị số 100 :

a) $111 - 11$ (= 100) b) $33.3 + \frac{3}{3}$

c) $5.5.5 - 5.5$ hoặc $(5 + 5 + 5 + 5).5$.

§7. **1.** Ngôi sao sáu cánh (hình 137).

2. Chùm nho cùng với lá (hình 138).



H.137



H.138

§8. **1.** Ô 9 chữ số này có 3 điều lạ sau :

a) không có chữ số 0.

b) số có ba chữ số ở dòng cuối (459) bằng tổng các số có ba chữ số ở hai dòng đầu (459 = 176 + 283).

c) mỗi chữ số chỉ gặp một lần.

2. Từ hình vuông với hai đường chéo có được các chữ số sau :



§9. **1.** Vẽ lối đi một chiều (hình 139).

Vào A B Ra

H.139

2. Vẽ đường đi chỉ qua mỗi ô một lần (hình 140).

A

H.140

§10. **1.** Dùng các dấu + và – xen vào giữa các chữ số :

a) 123 – 45 – 67 + 89 = 100 (3 dấu)

12 – 3 – 4 + 5 – 6 + 7 + 89 = 100 (6 dấu)

b) 98 – 76 + 54 + 3 + 21 = 100 (4 dấu)

9 + 8 + 76 + 5 + 4 – 3 + 2 – 1 = 100 (7 dấu).

2. Ngoài năm 1973 còn có các năm sau đây là số nguyên tố :

1979; 1987; 1993; 1997 và 1999.

MỤC LỤC